Formulation Hamiltonienne De La Relativité Générale

Ahmed YOUSSEF
DEA De Physique Théorique

Cours de relativité générale de Nathalie Deruelle

9 mai 2007

Résumé

Ce travail a pour but de présenter succintement les différents éléments nécessaires à l'obtention d'une formulation hamiltonienne de la relativité générale. Pour ce faire, on commence par présenter le problème de Cauchy dans le contexte de la théorie d'Einstein. On montre que les difficultés que l'on rencontre pour formuler un problème de Cauchy bien posé sont une conséquence de l'invariance de jauge de la théorie. A l'occasion j'explique plus précisement en quel sens la relativité générale peut être vue comme une théorie invariante de jauge. On présente alors la formulation hamiltonienne de la relativité générale, suivie d'une brève discussion du traitement canonique des systèmes soumis à des contraintes développé par Dirac. Finalement on présente quelques ouvertures vers un formalisme hamiltonien plus covariant et vers la théorie quantique.

Table des matières

1 Formulation lagrangienne

Dans ce travail, on va considérer la théorie d'Einstein de la gravitation sans matière et sans constante cosmologique. Dans ce cas l'équation d'Einstein s'écrit

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique, $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci issu du tenseur de Riemann

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{jk} g_{il} + \partial^2_{il} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jl} - \partial^2_{jl} g_{ik}\right) \qquad R_{ij} = g^{kl} R_{kilj}$$

Finalement $R = g^{ij} R_{ij}$ est la courbure scalaire.

Un point de vue variationnel est possible si on considère l'action

$$S[g] = \int d^4x \, \mathcal{L} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L} = \sqrt{-g} R \quad \text{et} \quad g = \det\left(g_{\mu\nu}\right)$$

Pour écrire les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$ associées à cette action, il faut remarquer que certains termes obtenus lors de la variation de l'action sont des divergences. Si on prend donc les variations des champs *et de leur dérivées* nulles aux bornes, le théorème de Gauss montre que la contribution de ces termes à l'action est nulle. On obtient ainsi l'équation d'Einstein.

Remarquons finalement que les équations d'Einstein dans le vide se réduisent à $R_{\mu\nu} = 0$. Pour le voir il suffit de contracter les deux membres des équations d'Einstein par $g^{\mu\nu}$. En effet à 4 dimensions d'espace temps on a

$$0 = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = -R \qquad \text{donc} \qquad G_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow R_{\mu\nu} = 0$$

2 Le problème de Cauchy en relativité générale

La formulation hamiltonienne consiste à voir la mécanique comme l'évolution de certains degrés de libertés dans un autre, un paramètre qu'on appelle temps. Cela nécessite donc l'identification d'un paramètre t par rapport auquel un feuilletage de la variété espace-temps en des variétés Σ_t 3 dimensionelles est possible (voir figure 1). L'existence d'un tel feuilletage n'est pas une question triviale : cela ne revient pas simplement à écrire que la variété espace-temps $\mathcal{M}$ se décompose en $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ où Σ est une sous variété 3 dimensionelle. En effet, pour que ce feuilletage ait un sens physique, il faut que la donnée des conditions initiales, par exemple $(g_{\mu\nu}, \partial_t \, g_{\mu\nu})$ sur Σ_{t_1} permette de déterminer ces mêmes champs sur Σ_{t_2}. C'est ce qu'on appelle de manière générale *le problème de Cauchy*. Pour des conditions initiales suffisamment régulières, ceci est par exemple le cas pour la mécanique newtonienne ou pour un champ de Klein-Gordon sur un espace Minkowskien. Il faut bien voir que dans le cas d'un problème de Cauchy mal posé, il est impossible d'avoir une formulation hamiltonienne puisqu'on ne peut pas prédire l'évolution des degrés de libertés dans le paramètre t de manière unique.

Pour la plupart des théories de la physique fondamentale l'existence d'un tel feuilletage avec les bonnes propriétés n'est pas garanti : le problème de Cauchy pour la théorie de Maxwell n'est pas a priori bien posé par exemple. Ceci est dû à l'invariance de jauge de l'électromagnétisme. Comme on va le voir dans la partie suivante la relativité générale peut être vue comme une théorie de jauge (invariance par difféomorphismes) et on va donc rencontrer le même type de difficultées pour formuler un problème de Cauchy bien posé.

La raison pour laquelle le problème de Cauchy est a priori mal posé dans une théorie de jauge est claire : aucun ensemble de conditions initiales ne permet de prédire l'évolution des degrés de libertés du champ de jauge A_μ de manière unique puisqu'on peut toujours faire une transformation de

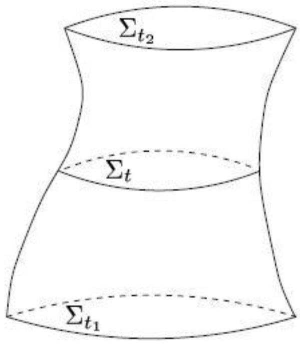

Fig. 1 – Un feuilletage de la variété espace-temps

jauge $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Voyons plus précisément les conséquences de cette invariance de jauge sur le problème de Cauchy. Le champ de jauge A_μ en électromagnétisme obéit aux 4 équations de Maxwell

$$\partial^\mu \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = 0$$

La « initial value formulation » la plus naturelle à ce stade consiste à se donner des conditions initiales $(A_\mu, \partial_0 A_\mu)_{|\mathrm{t=0}}$ et laisser ces 4 équations dicter leur évolution. Cependant si on regarde de plus près ceci est impossible. En effet, ces 4 équations ne sont pas toutes à mettre sur le même plan car on peut les écrire comme

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}.\vec{E} & = 0 \qquad \text{avec} \qquad \vec{E} = \vec{\nabla} A_0 - \partial_0 \vec{A} \\ \partial_0^2 \vec{A} & = \Delta \vec{A} + \vec{\nabla}\left(\partial_0 A_0 - \vec{\nabla}.\vec{A}\right) \end{array}\right.$$

Les trois dernières équations dictent une dynamique, alors que la première est une contrainte qui doit être imposée sur les conditions initiales : les équations ne permettent pas de déterminer A_0 qui doit être choisi arbitrairement. Mais une fois A_0 choisi, la première équation impose $\partial_0 \vec{A}$. Des conditions initiales $(A_\mu, \partial_0 A_\mu)_{|\mathrm{t=0}}$ qui ne vérifient pas cette contrainte ne permettent donc pas de déterminer l'évolution ultérieure de $(A_\mu, \partial_0 A_\mu)$. Puisque c'est l'invariance de jauge qui est responsable de cette ambiguïté, on fixe en général une jauge, par exemple $\partial_\mu A^\mu = 0$. On se retrouve alors souvent avec des équations différentielles dites hyperboliques qui admettent un problème de Cauchy bien posé.

Dans le cas de la relativité générale, on peut voir l'invariance par difféomorphisme comme une invariance de jauge (cf partie suivante). On est alors encore une fois face à un problème de Cauchy mal posé. On commence par identifier un paramètre temporel t, qui sera pris arbitrairement, et qui permet d'avoir un feuilletage Σ_t de la variété $\mathcal{M}$. Il est alors naturel de considérer que les degrés de libertés sont $\left(g_{\mu\nu|_\Sigma}, \partial_t\, g_{\mu\nu|_\Sigma}\right)$.

Comme en électromagnétisme, on sépare les 10 équations d'Einstein en des équations dynamiques et des contraintes. Les identités de Bianchi permettent de le faire ($0 \leq \mu, \nu \leq 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq i, j \leq 3$) :

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_0 G^{0\nu} = -\partial_i G^{i\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} G^{\mu\lambda}$$

Où l'on a noté la dérivée covariante relative à la métrique par ∇. La partie droite de cette équation ne contient pas de dérivée temporelle troisième de la métrique, donc la partie gauche non plus. Ainsi même si le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$ contient de manière générale des dérivées temporelles secondes, les composantes $G^{0\nu}$ n'en contiennent pas. Donc parmi les 10 équations indépendantes d'Einstein, les 4 suivantes

$$G^{0\nu} = 8\pi G T^{0\nu}$$

ne permettent pas de faire évoluer les conditions initiales $\left(g_{\mu\nu|_\Sigma}, \partial_t\, g_{\mu\nu|_\Sigma}\right)$. Ce sont en fait des contraintes à imposer sur ces conditions initiales et qui seront conservées par les 6 autres équations du mouvement

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij}$$

On a donc 6 équations dynamiques pour déterminer les 10 composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique. Il en résulte nécessairement une ambiguïté qui est due à l'invariance de jauge (par difféomorphisme). Pour pouvoir formuler un problème de Cauchy bien posé on doit donc, comme en électromagnétisme, imposer un choix de jauge particulier, c'est à dire un choix de coordonnées. On utilise souvent la jauge harmonique :

$$\nabla_\nu \nabla^\nu x^\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\mu} \right)$$

J'ai traité ici le problème de Cauchy en relativité générale de manière très rapide. Il faut cependant bien voir que ce problème et le problème de la structure causale de la relativité générale sont des questions subtiles auquelles de nombreux ouvrages sont consacrés, par exemple on peut se référer à [Wald] chapitre 8 et 10, [Fischer] et [Hawking]. Je n'ai malheureusement pas eu le temps de m'attarder sur ces travaux.

Terminons cette partie par une remarque d'ordre général : le formalisme hamiltonien n'est naturel que dans le cadre d'une mécanique newtonienne. Dans une théorie invariante de Lorentz ce formalisme singularise une coordonnée dans $\mathcal{M}_4$ et brise donc la manifeste covariance de la théorie. Il est donc nécessaire de vérifier au bout du compte que l'invariance de Lorentz a survécu à cette procédure. En relativité générale le formalisme hamiltonien est encore moins naturel puisqu'il n'existe même pas une notion claire de temps. En effet dans le cas de la relativité générale le sens que l'on doit donner au paramètre t est non trivial et il est a priori complètement arbitraire. La seule situation que je connaisse où l'on peut donner une interprétation, approximative, de ce temps t est dans les contextes hautement symétriques rencontrés en cosmologie. En effet le paramètre t qui apparaît dans la métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - k\, r^2} + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \right)$$

le temps cosmique, admet une interprétation proche de celle que l'on donne à un temps newtonien. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les cosmologistes observationnels se permettent d'employer un vocabulaire newtonien pour décrire l'évolution de l'univers.

3 La relativité générale comme théorie de jauge

La relativité générale peut être vue comme une théorie de jauge ou l'on jauge l'invariance par translation de la théorie.

$$x_\mu \longrightarrow x_\mu + \epsilon_\mu \qquad \text{devient} \qquad x_\mu \longrightarrow x_\mu + \epsilon_\mu(x)$$

On peut préciser la version infinitésimale de cette invariance de jauge pour montrer encore plus l'analogie avec les théories de jauge standard qui résultent d'une symétrie locale de groupe de Lie $SU(N)_x$. Soit la transformation infinitésimale $x' = x - \xi$. On considère la variation d'un tenseur T définie par la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\xi$

$$\delta_\xi T(x) = \mathcal{L}_\xi T = T'(x') - T(x')$$

On peut vérifier qu'on a une structure d'algèbre de Lie

$$\left[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_{\xi'} \right] = \mathcal{L}_{[\xi,\xi']} \qquad \text{avec} \qquad \left[\xi, \xi' \right]^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \xi'^\mu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu$$

la variation d'un scalaire R s'écrit

$$\mathcal{L}_\xi(R) = \xi\,(R) = \xi^\mu \partial_\mu R$$

De même la variation du tenseur métrique et de son déterminant valent

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \xi^\rho + \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \qquad \mathcal{L}_\xi \left(\sqrt{-g} \right) = \partial_\mu \left(\xi^\mu \sqrt{-g} \right)$$

La variation du lagrangien est donc une divergence et l'action est invariante

$$\mathcal{L}_\xi \left(\sqrt{-g}R\right) = \partial_\mu \left(\xi^\mu \sqrt{-g}R\right)$$

La relativité générale peut donc être vue comme une théorie de jauge où les transformations de jauges sont les changements de coordonnées. D'ailleurs historiquement, d'une part c'est Weyl qui utilisa le premier le terme de théorie de jauge et ceci dans le contexte de la relativité générale et d'autre part la théorie de Yang-Mills trouve l'une de ses motivations dans la formulation mathématique de la relativité générale comme théorie de jauge. Il faut cependant noter que, sur le plan conceptuel, voir la relativité générale comme une théorie de jauge recèle de très nombreuses subtilités. Pour ce genre de considérations on peut par exemple se reporter aux excellentes présentations [Isham] et [Rovelli].

4 Formulation hamiltonienne

On s'attaque donc maintenant à la formulation hamiltonienne de la relativité générale (voir Annexe E du [Wald] pour plus de détail). On considère donc un feuilletage de la variété espace-temps $\mathcal{M}$ par une famille de surface de Cauchy Σ_t où le champ de vecteurs t^a vérifie $t^a \nabla_a t = 1$. On définit le vecteur n^a normal à Σ. La métrique 4 dimensionnelle $g_{\mu\nu}$ induit sur chaque feuille Σ_t une 3 métrique h_{ab} donnée par $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$. On définit alors la fonction lapse et le vecteur shift par (voir figure 2)

$$N = -g_{ab} t^a n^b \qquad N^a = h^a_b t^b$$

ce qui donne

$$n^a = \frac{1}{N}\left(t^a - N^a\right)$$

La 4 métrique s'écrit alors dans ces nouvelles variables

$$g_{ab} = h^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b)$$

Les feuilles Σ peuvent naturellement être vues comme plongées dans $\mathcal{M}$. On peut alors définir une notion de courbure extrinsèque K_{ab} qui permet d'exprimer l'action d'Hilbert Einstein de manière commode. En effet après un long calcul on trouve que le lagrangien de la relativité s'écrit

$$\mathcal{L} = \sqrt{h}N\left(R^{(3)} + K_{ab}K^{ab} - K^2\right)$$

où $R^{(3)}$ est la courbure scalaire relatif à la 3 métrique h_{ab} et $K = K^a{}_a$. La courbure extrinsèque

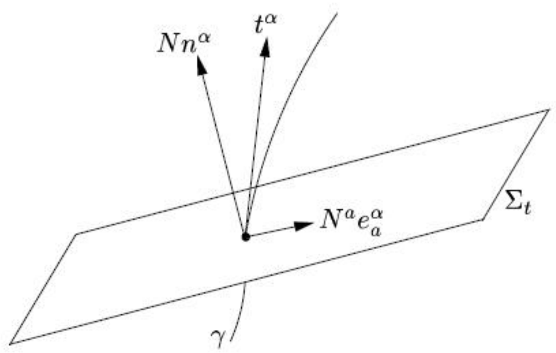

FIG. 2 – Le lapse et le shift

s'exprime en fonction de la dérivée temporelle de h_{ab} (définie par la dérivée de Lie $\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}$) :

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ab} - \nabla_a^{(3)} N_b - \nabla_b^{(3)} N_a\right)$$

où $\nabla^{(3)}$ désigne la dérivée covariante relative à la 3 métrique. On peut calculer maintenant les moments conjugués aux champs.

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}\left(K^{ab} - K h^{ab}\right)$$

Par contre, comme en électromagnétisme, on trouve que les moments conjugés π, π^a relatifs à N et N_a sont nuls. Ceci est à priori gênant car on ne peut plus inverser la transformée de Legendre entre π, π^a et N, N_a. Mais suivant la discussion précédente sur l'invariance de jauge, N, N_a ne doivent pas être interprétés comme des degrés de liberté dynamiques. Ce sont plutôt 4 multiplicateurs de Lagrange relatifs aux 4 contraintes $G^{0\nu} = 0$ qu'on a identifiées précédemment. La densité hamiltonienne s'écrit

$$\mathcal{H} = \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}$$

On montre alors que l'hamiltonien s'écrit

$$H = \int_{\Sigma_t} d^3x\,(N\mathcal{H} + N_a\mathcal{H}^a)$$

où l'on a utilisé les notations suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\sqrt{h}R^{(3)} + \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \qquad \text{avec} \qquad \pi = \pi^a{}_a \\ \mathcal{H}^a &= -2\left(\partial_b \pi^{ab} + \Gamma^{a(3)}_{mn}\pi^{mn}\right) \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{a(3)}_{mn} = \frac{1}{2}h^{al}\left(\partial_m h_{nl} + \partial_n h_{lm} - \partial_l h_{mn}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Cette forme de l'hamiltonien permet donc de voir directement que N, N_a sont des multiplicateurs de Lagrange qui forcent les contraintes $\mathcal{H} = 0$ et $\mathcal{H}^a = 0$. Ces contraintes sont exactement les contraintes qu'on a obtenues dans la partie précédente $G^{0\nu} = 0$. On peut également vérifier que les équations d'Hamilton relatives à H redonnent les équations d'Einstein :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{h}_{ab} &= \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \\ \dot{\pi}^{ab} &= -\frac{\delta H}{\delta h_{ab}} \end{aligned} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad R^{ab} = 0$$

5 Structure canonique des systèmes avec contraintes

On a obtenu dans la partie précédente une fonction hamiltonien H et des variables conjugées $\left(h_{ab}, \pi^{ab}\right)$ telles que les équations d'Hamilton redonnent les équations d'Einstein de la relativité générale. Si c'est cela qu'on entend par formulation hamiltonienne alors on est satisfait. Cependant ce qu'on entend en général par la formulation hamiltonienne d'une théorie est bien plus que ça : on veut munir l'espace des phases $\left(h_{ab}, \pi^{ab}\right)$ d'une structure symplectique (d'algèbre de Poisson), induite par les crochets de Poisson $\{\ ,\ \}_{|P}$. En effet la quantification canonique par exemple est basée sur cette structure puisque le principe de correspondance consiste à promouvoir les crochets de Poisson en commutateur, c'est à dire d'associer un espace d'Hilbert à une variété symplectique.

$$\{\ ,\ \}_{|P} = i \qquad \Longrightarrow \qquad [\ ,\ ] = i\delta$$

Pour appliquer ce formalisme il faut identifier les vrais degrés de libertés dynamiques de la théorie. En présence de contraintes cela implique la résolution explicite des équations de contraintes. Ceci peut être fait par exemple pour les équations de Maxwell dans le vide puisqu'elle sont linéaires. Cependant en relativité générale, les équations de contraintes qu'on a trouvées précédemment sont non linéaires et on ne sait pas les intégrer exactement. On est donc incapable d'isoler les vrais degrés de liberté de la théorie et donc de mettre une bonne structure symplectique sur l'espace des phases. En effet la relativité générale, même en l'abscence de matière, est une théorie hautement non triviale puisque le champ gravitationel auto-interagit ($G^{\mu\nu} = 0$ est un système d'équations aux dérivés partielles non linéaires). Remarquons que ceci est également le cas pour les théories de jauge *non abéliennes* (c'est donc l'électromagnétisme, théorie abélienne, qui est une exception).

Pour remédier à ce problème, Dirac [Dirac] a développé un formalisme canonique pour les systèmes contraints qui ne nécessite pas de résoudre à priori les contraintes. Ce formalisme est basé sur une notion de crochets de Dirac $\{\ ,\ \}_{|D}$ qui généralise les crochets de Poisson. Dans les cas simples ou l'on peut résoudre exactement les contraintes on vérifie alors explicitement que les conditions qu'on aura imposées sur les crochets de Dirac sont équivalentes à celles qu'on impose à travers les crochets de Poisson sur la théorie où les contraintes sont résolues. Une présentation claire et concise se trouve dans [Weinberg], la référence étant bien évidemment le livre de Henneaux et Teitelboim [Henneaux].

Notons également l'utilisation des variables d'holonomie dans les théorie de jauge pour essayer de simplifier les contraintes et faciliter ainsi la quantification. En théorie de jauge ce sont les variables de Polyakov je pense. Cependant on ne peut pas vraiment utiliser ces variables en raison de la non séparabilité de la base qu'elle forment. En relativité générale ces variables portent le nom de variables d'Ashtekar. Dans ce cas l'invariance par difféomorphisme corrige les problèmes de non séparabilité. Ceci est à la base d'un programme de quantification de la relativité générale : la loop quantum gravity. Pour plus d'information à ce sujet voir [Rovelli].

6 Ouvertures

6.1 Formalisme canonique covariant

Le caractère non explicitement covariant du formalisme hamiltonien est gênant sur le plan technique mais surtout sur le plan conceptuel. Durant mon stage de l'année dernière je me suis intéressé à un formalsime hamiltonien covariant, le formalisme de DeDonder-Weyl. Dans ce formalisme on traite les quatre coordonnées sur le même plan et on définit des moments relatif à chaque variable. Pour une densité lagrangienne $\mathcal{L}\left(\phi^a, \partial_\mu \phi^a, x^\nu\right)$ on définit les multi-moments et la densité hamiltonienne :

$$\pi_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \partial_\mu \phi^a \ \pi_a^\mu - \mathcal{L}$$

Les équations d'Hamilton s'écrivent alors

$$\partial_\mu \phi^a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a^\mu} \qquad \partial_\mu \pi_a^\mu = -\frac{\delta H}{\delta \phi^a}$$

Pour plus d'informations sur ce formalisme, son application à la relativité générale et sa quantification voir [Kanatchikov] et [Rovelli2].

6.2 Quantification canonique de la relativité générale

La seule vraie contrainte qu'on peut raisonnablement demander de vérifier à une théorie qui va au-delà du modèle standard et qui inclut la gravitation est de redonner la relativité générale et le modèle standard dans une certaine limite (et bien sûr de fournir des prédictions de nouveaux phénomènes qui soient vérifiables par l'expérience). Cette contraintes nous laissent beaucoup de choix, en témoignent les différentes approches concurrentes pour trouver une théorie de la gravitation quantique.

En particulier une approche standard de quantification est l'approche canonique qui s'appuie sur la formulation hamiltonienne de la relativité générale. Les équations formelles de cette théorie ont été écrites par Wheeler et DeWitt dans les années soixante. C'est la fameuse équation de Wheeler-DeWitt qui est une équation différentielle fonctionnelle, c'est à dire en gros une équation aux dérivées partielles mais avec un nombre infini de variables. Cette équation s'est avérée être beaucoup trop mal définie mathématiquement. Les travaux se basant sur elle et qui avaient un sens autre que purement formel étaient obligés de tronquer le champ gravitationnel à un nombre fini de degrés de liberté, afin de réduire l'équation de Wheller-DeWitt à une équation aux dérivées partielles à un nombre fini de variables. Ce n'est qu'en 1986 que le programme de la quantification canonique a connu une avancée majeure : Ashtekar a trouvé un nouvel ensemble de variables canoniques qui simplifient considérablement les contraintes $\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_\perp$. L'exploitation de ces nouvelles variables au niveau quantique est à l'origine du programme de la *gravitation quantique à boucles* comme je l'ai déja indiqué dans la partie précédente.

Outre les problèmes techniques très sérieux, l'objet ψ sur lequel porte l'équation de Wheeler-DeWitt pose de très sérieux problèmes d'interprétations. En effet on a naturellement envie de l'appeller fonction d'onde de l'univers. Il est cependant clair qu'un tel objet pose de nombreux problèmes conceptuelles et que les questions relatives à l'interprétation de la mécanique quantique, sujet notoirement difficile, ne peuvent pas être passées sous silence dans ce contexte de cosmologie quantique.

7 Conclusion

On a vu très rapidement comment formuler un problème de Cauchy bien posé en relativité générale. J'aimerais maintenant passer plus de temps pour creuser cette question et les questions qui y sont reliées, notamment la structure causale de la relativité générale, la notion d'espace globalement hyperbolique et d'équations différentielles hyperboliques. J'ai ensuite montré comment voir la relativité générale comme une théorie de jauge. J'aimerais me familiariser avec les différents choix de jauge en relativité générale et les libertés de jauge résiduelles qui en découlent (puisqu'en général les choix de jauges ne fixent que partiellement la jauge), qui sont moins transparents qu'en électromagnétisme. Il me semble également nécessaire de réfléchir sur le sens de l'invariance par difféomorphisme en relativité, question d'une grande subtilité mais aussi d'une grande importance notamment pour la construction d'une théorie quantique. Le formalisme canonique de Dirac est d'une grande importance mais je n'ai malheureusement pas eu le temps d'aller assez loin dans son traitement. Enfin il me semble que la question de la formulation hamiltonienne des théories de Yang-Mills peut éclaircir ce qui se passe en gravitation puisque la structure des contraintes présente probablement des similarités dans ces deux théories.

Références

[Dirac] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Dover Publications (2001)

[Deruelle] N. Deruelle, *La théorie d'Einstein de la gravitation*

[Fischer] Arthur E. Fischer and Jerrold E. Marsden, *The initial value problem and the dynamical formulation of general relativity*, in *General relativity, an Einstein century survey*, Cambridge university press (1979).

[Hawking] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge university press (1973).

[Henneaux] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton university press (1992).

[Isham] J. Butterfield and C. Isham, *Spacetime and the philosophical challenge of Quantum Gravity*, in *Physics meets philosophy at the Planck scale*, Cambridge university press (2000).

[Kanatchikov] I. Kanatachikov, *On field theoretic generalizations of a Poisson algebra*, Rep. Math. Phys., vol 40, p.225 (1997).

[Linet] B. Linet, *Notes de cours de relativité générale*

[Rovelli] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge university press (2004).

[Rovelli2] C. Rovelli, *Covariant hamiltonian formalism for field theory*, gr-qc/0207043v2 (2002).

[Wald] R. Wald, *General relativity.*

[Weinberg] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*