

STAGE DE RECHERCHE

PHYTEM 2^{ÈME} ANNÉE - M1



Hamiltonien et Espace de Fock de la *Group Field Theory*

GRAVITATION QUANTIQUE

Stagiaire : AHMED YOUSSEF
Maître de stage : DANIELE ORITI
Laboratoire d'accueil : DEPARTEMENT OF APPLIED MATHEMATICS
AND THEORETICAL PHYSICS (DAMTP)
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
Durée du stage : 1^{er} MAI 2006 - 1^{er} SEPTEMBRE 2006

Résumé

La *Group Field Theory* (GFT), est une théorie de la gravitation quantique qui entend inclure la plupart des différentes approches non-perturbatives de la gravitation quantique. Elle se veut une théorie quantique des champs **de** l'espace temps (par opposition au cas usuel d'une théorie quantique des champs **sur** l'espace temps).

En explicitant le contenu en particules de la théorie, le but de ce travail est de contribuer à cette image d'une théorie de l'espace temps. La construction de l'hamiltonien et de l'espace de Fock de la GFT, fournit enfin une réalisation mathématique rigoureuse de l'intuition - qui a toujours été présente dans les approches non-perturbatives de la gravitation quantique - de la notion d'atome d'espace temps. L'un des résultats les plus importants qui sera démontré est la nature fermionique de ces éventuelles particules élémentaires d'espace-temps. Ce travail ouvre également une nouvelle perspective de solution à l'une des questions les plus fondamentales posées par différentes théories de la gravitation quantique et qui reste sans réponse : La limite semi-classique est-elle en accord avec la relativité générale et le modèle standard ? Cette étude, permettrait de comprendre l'espace temps classique de la relativité générale comme un phénomène émergent, dans le langage de la thermodynamique, de la dynamique quantique de blocs de bases que sont les atomes d'espace temps. L'espace temps à grande échelle serait donc un gaz quantique d'atomes fondamentaux fermioniques, capable de manifester une très grande richesse de phénomènes, tels les trous noirs ou les ondes gravitationnelles.

Le rapport commence par présenter la gravitation quantique et ses motivations. Ce n'est qu'à partir de la section 3 que j'expose mon propre travail.

Table des matières

1	Une idée de la gravitation quantique	4
1.1	Introduction	4
1.2	Deux mots sur la théorie quantique des champs	4
1.3	Deux mots sur la relativité générale	6
1.4	Motivations pour étudier la gravitation quantique	7
1.5	Gravitation quantique perturbative	8
1.5.1	La non-renormalisabilité de la relativité générale	8
1.5.2	Un exemple : la gravitation quantique en $2 + 1$ dimensions	10
1.6	Différentes approches	10
2	La <i>Group Field Theory</i>	12
2.1	La <i>Group Field Theory</i> (GFT)	12
2.2	La Generalised <i>Group Field Theory</i> (GGFT)	13
3	Théorie quantique des champs paramétrisée	13
3.1	Théorie classique	14
3.2	Théorie classique des champs et première quantification	15
3.3	Théorie quantique des champs (deuxième quantification)	17
4	Quantification canonique de la GGFT sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$	18
4.1	Les difficultés du lagrangien inhabituel de la GGFT	18
4.2	La quantification	21
4.3	Implémentation de la symétrie de la GFT	23
4.4	L'espace des solutions le plus générale	24
4.4.1	Résoudre exactement une théorie dépendant du temps	26
4.5	La GGFT a temps unique : $\tau_1 = \tau_2 = \tau$	27
4.6	Le bon nombre de degrés de liberté et la mécanique de Nambu	28
5	Quantification canonique de la GGFT sur $(\mathbb{G} \times \mathbb{R})^n$	29
6	Investigations naturelles découlant de ce travail : la limite continue et l'émergence de la relativité générale	29
6.1	L'espace temps, un superfluide fermionique?	29
6.2	Autres idées	29
7	Conclusion	30
8	Annexes	33
8.1	Annexe 1 : Propagateur de Schrödinger	33
8.2	Annexe 2 : Propagateur de Klein-Gordon avec énergies positives	33
8.3	Annexe 3 : Causalité en théorie quantique des champs	34
8.4	Annexe 4 : Sans nombre infini de degrés de liberté, pas de brisure spontanée de symétrie	36
8.5	Annexe 5 : Un peu de relativité générale.	36
8.6	Annexe 6 : Les relations de commutations canoniques et le théorème de Stone-von Neumann	38
8.7	Annexe 7 : Résolution algébrique exacte de l'oscillateur harmonique dépendant du temps	40
8.8	Annexe 8 : Une théorie d'ordre supérieur, la GGFT à temps unique	42

But the creative principle resides in mathematics. In a certain sense, therefore, I hold it true that pure thought can grasp reality, as the ancients dreamed.

A. Einstein

1 Une idée de la gravitation quantique

1.1 Introduction

La physique du XX^{ème} siècle a profondément modifié notre compréhension du monde : la mécanique quantique (sous sa forme la plus élaborée qu'est la théorie quantique des champs) et la relativité générale ont changé le sens même des concepts de base qu'on utilise pour l'appréhender : matière, causalité, espace et temps. Cependant, on n'a pas encore trouvé une image cohérente du monde dans laquelle ces modifications font sens ensemble. Le problème de la gravitation quantique est de trouver cette nouvelle image cohérente [Rovelli].

Il est fort possible qu'une théorie permette de concevoir des expériences - à notre portée technologiquement - révélant des empreintes de la gravitation quantique, exhibant ainsi des comportements non prédits par nos théories actuelles. Cependant, en l'absence d'une telle théorie, le seul domaine où l'on peut concevoir des expériences mettant en jeu des effets notables de la gravitation quantique a priori, le domaine de Planck, est tout à fait inaccessible à nos moyens technologiques. En effet, on sait que les deux théories fondamentales de la nature que nous possédons introduisent trois constantes fondamentales à partir desquelles on peut former de façon unique une longueur appelée longueur de Planck L_P , plus petite que le noyau atomique par environ plusieurs dizaines d'ordres de grandeur : $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}m$. Dans un tel contexte, où l'expérience n'est pas présente pour nous suggérer de nouveaux principes fondamentaux, on doit faire de notre mieux pour comprendre complètement les implications des principes qui sont déjà à notre disposition. C'est dans une telle perspective que s'inscrit la GFT. Enfin, comme toute théorie de la gravitation quantique, la GFT est une théorie en construction, c'est à dire qu'elle est encore loin d'être théoriquement comprise et qu'elle reste non confrontée à l'expérience. Toutes ces théories peuvent donc se révéler tout simplement fausses. Cependant, elles ont toutes de très bonnes raisons d'être étudiées.

1.2 Deux mots sur la théorie quantique des champs

Dans ce paragraphe je vais résumer les motivations principales derrière la théorie quantique des champs. Dans les sections suivantes on aura l'occasion d'en construire plusieurs précisément.

Il est connu que la mécanique quantique usuelle ne respecte pas la symétrie de la relativité restreinte. Pour le voir, considérons par exemple l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \hat{H}(t) |\psi, t\rangle = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{V}(\vec{r}, t) \right] |\psi, t\rangle \quad (1)$$

Pour montrer que cette équation n'est pas relativiste, calculons l'amplitude de probabilité de propagation libre $\mathcal{K}(x \rightarrow y)$ entre 2 points quelconques d'espace temps $x = (\vec{x}, 0)$ et $y = (\vec{y}, t)$. Le calcul fait en détail dans l'annexe 1 donne

$$\mathcal{K}(x \rightarrow y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar t} (y - x)^2 \right] \quad (2)$$

Ce propagateur ne s'annule jamais, quelque soit le signe de $(ct)^2 - (y - x)^2$, la théorie n'est donc pas relativiste. Il est alors naturel de vouloir aller plus loin en incluant les principes de la relativité restreinte à la mécanique quantique. Historiquement, on a essayé d'écrire une équation quantique

relativiste pour une particule sans spin (équation de Klein-Gordon) ou avec un spin demi-entier (équation de Dirac). Dans les deux cas, on rencontre une difficulté considérable : l'apparition d'énergies négatives. Pour une discussion plus détaillée de la raison pour laquelle il est important d'avoir un hamiltonien positif, voir plus bas. On peut construire une équation quantique relativiste en se basant sur le même principe de correspondance qui permet d'écrire l'équation de Schrödinger à partir de la dynamique classique, à savoir

$$\begin{aligned} \text{énergie } E &\longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \text{impulsion } p^i &\longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (3)$$

ou en notation minkowskienne

$$p^\mu \longrightarrow i\hbar \partial^\mu = (i\hbar \partial^0, -i\hbar \nabla) \quad (4)$$

A partir de cette correspondance, la relation énergie-moment non relativiste $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ donne bien l'équation de Schrödinger. A son tour, la relation relativiste qui s'écrit

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5)$$

donne, dans un système d'unité où $\hbar = c = 1$, l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi(\vec{x}, t) \quad (6)$$

La première remarque à faire immédiatement est que les niveaux d'énergie qui découlent de cette équation sont à la fois positifs et négatifs

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (7)$$

Ces niveaux d'énergie négatifs ne sont pas bornés inférieurement, il est donc impossible de les rendre positifs en ajoutant une constante (l'énergie étant définie à une constante près, en tout cas en l'absence de gravitation qui elle complique les choses). La théorie est donc instable car le système aura toujours tendance à tomber toujours plus bas en énergie. Pour contourner le problème, on peut décider (arbitrairement) de se restreindre aux énergies positives. Le calcul du propagateur fait dans l'annexe 2 montre alors que la théorie ne respecte pas plus la causalité relativiste que l'équation de Schrödinger. La théorie présente également beaucoup d'autres problèmes, tel que l'apparition de probabilités négatives et de paradoxes. Dirac, en écrivant sa célèbre équation quantique relativiste pour l'électron, a espéré un moment se débarrasser de ces difficultés, puisque celle-ci est du premier ordre. Cependant, l'équation de Dirac présente les mêmes symptômes.

En effet, plusieurs raisons peuvent indiquer a priori qu'une théorie d'une seule particule quantique relativiste est une mauvaise manière de fusionner les principes relativistes et la mécanique quantique. Un argument heuristique est le suivant : la relativité, d'après l'équivalence masse-énergie $E = mc^2$, autorise la création de particules si l'énergie suffisante est disponible. D'un autre côté la relation d'incertitude temps-énergie $\Delta E \Delta T \geq \frac{\hbar}{2}$ rend disponible de grandes quantités d'énergie pendant de courtes durées temporelles et ceci de manière « incontrôlée ». Il est donc naturel de s'attendre à une non-conservation du nombre de particules. Bien sûr ceci est vérifié tous les jours dans les réactions entre particules élémentaires, comme par exemple la désintégration du neutron en un proton, un électron et un antineutrino :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Il faut donc chercher à construire une théorie capable de gérer des états où le nombre de particules est non conservé. Ceci a été achevé par la création de la théorie quantique des champs : on applique les principes de la mécanique quantique à un champ défini en tout point de l'espace-temps (et donc un système à un nombre infini de degrés de liberté) au lieu de les appliquer à une seule particule (donc quelques degrés de liberté). Les particules apparaissent alors comme les excitations du champs quantifié. La théorie quantique des champs ainsi obtenue résout les problèmes que rencontrent les

théories à une particule de façon très élégante. Voir l'annexe 3 pour la résolution du problème de la causalité en théorie quantique des champs.

Donc, en deux mots, une théorie quantique des champs (QFT) est une mécanique quantique relativiste à un nombre infini de degrés de liberté. Ce **nombre infinis de degrés de liberté** est à la base des propriétés les plus originales et intéressantes des QFT :

1. Tout d'abord, il est naturel de s'attendre à des **divergences**. La théorie de la renormalisation, qui nous apprend comment maîtriser ces divergences pour relier la théorie à l'expérience est l'une des étapes les plus importantes dans l'histoire de la physique moderne.
2. La possibilité de **brisure spontanée de la symétrie** est une autre conséquence extrêmement importante du nombre infini de degrés de liberté : l'état fondamental (de plus basse énergie) de la théorie n'est plus unique. Le concept de brisure spontanée de symétrie joue un rôle majeur dans le modèle standard et le restera sûrement au delà. Dans l'annexe 4, j'explique pourquoi dans une théorie à un nombre fini de degrés de liberté, un tel phénomène est tout simplement impossible.

1.3 Deux mots sur la relativité générale

Je vais présenter de manière encore plus laconique la relativité générale, car mes connaissances sont limitées. Il est immédiat de constater que la gravitation newtonienne est incompatible avec la relativité restreinte, puisque c'est une force instantanée. La force de gravitation newtonienne ressemble étrangement à la force de Coulomb et cette dernière est bien sûr elle aussi incompatible avec la relativité restreinte. Par contre, dans ce cas, on connaît la solution : la force de Coulomb n'est qu'une approximation statique d'une théorie des champs qui elle est compatible avec la relativité restreinte : La théorie du champ électromagnétique de Maxwell (bien sûr, historiquement, la relativité restreinte a suivi et est une conséquence de la théorie de Maxwell et non le contraire). Il est donc naturel de chercher une théorie des champs de la gravitation, sur le modèle de Maxwell, dont la force de Newton serait une approximation statique. Si on suppose que le champ gravitationnel est scalaire, les équations d'une telle théorie pourront par exemple ressembler à

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u^\mu &= [\eta_{\mu\nu} + u^\mu u^\nu] \partial_\nu \phi \\ \square \phi &= -4\pi G \sum_\alpha m_\alpha \int ds \delta^4 [x^\mu(s) - x_\alpha^\mu(s)] \end{aligned} \quad (8)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique lorentzienne de signature $(1, -1, -1, -1)$, s le temps propre, et $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ le quatre vecteur vitesse. Les sources du champ étant données par les masses des lignes d'univers x_α . On peut également supposer que le champ gravitationnel est vectoriel ou tensoriel et écrire des équations du même type. Cependant les prédictions de ce type de théories se trouvent en contradiction avec l'expérience, conduisant par exemple à un retard systématique de la périhélie de Mercure. Pour plus de détails voir [Linnet] et [Wheeler].

Pour résoudre le problème, Einstein est parti du fait suivant : dans la mécanique de Newton, la constante de couplage de l'interaction gravitationnelle est confondue (à des constantes multiplicatives dimensionnées près) avec l'inertie du système étudié.

$$-GmM \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \vec{F} = m\vec{a} \quad (9)$$

La paramètre m se simplifie, et tout les corps tombent donc de la même façon, indépendamment de leur composition chimique, de leur contenu en matière \dots : c'est l'universalité de la chute libre. Ceci est bien évidemment faux pour n'importe quelle autre interaction. Par exemple, la constante de couplage de la force électrique dépend du corps étudié puisqu'elle est proportionnelle à la charge électrique de celui-ci, quantité qui n'a rien à voir avec la masse. Cette particularité de la gravitation n'est qu'un fait secondaire (et tout à fait miraculeux) dans la mécanique newtonienne. Einstein va en

faire l'un des fondements de la gravitation. L'idée est la suivante : la gravitation s'applique à tous les corps de la même manière, il faut donc la comprendre de façon plus intrinsèque, c'est à dire d'une façon géométrique.

L'espace-temps devient une entité dynamique, qui interagit avec son contenu de matière-énergie, par opposition à l'espace-temps plat issu de Newton (euclidien dans la mécanique classique et min-kowskien en relativité restreinte) qui est une scène sur laquelle la mécanique se déroule, sans qu'il en soit influencé. Selon une célèbre expression : la matière dit à l'espace-temps comment se courber et l'espace-temps dit à la matière comment se mouvoir. Pour plus de détails mathématiques, voir l'annexe 5.

Je n'ai pas encore parlé de certaines particularités des plus importantes de la relativité générale. Je vais me contenter d'en citer quelques unes dans ce qui suit :

- L'invariance par reparamétrisation (par difféomorphisme) permet d'interpréter la relativité générale comme une théorie de jauge. Dans le cas de la relativité générale ce point de vue présente certaines subtilités mais il est très intéressant. Le groupe des difféomorphismes sur la variété \mathcal{M} en question $\text{Diff}(\mathcal{M})$ joue alors le rôle du groupe de jauge. Je me suis dit alors que la théorie des représentations du groupe $\text{Diff}(\mathcal{M})$ devrait nous donner l'ensemble des champs et des équations admissibles pour décrire la gravitation. Cependant, le groupe $\text{Diff}(\mathcal{M})$ est très différent des groupes de jagues usuels $SU(2)$, $SU(3)$ car il est de dimension infinie. Une discussion avec Lee Smolin qui visitait le laboratoire m'a permis alors de découvrir qu'en effet, parce que $\text{Diff}(\mathcal{M})$ est trop gros, on ne sait pas grand-chose sur sa théorie des représentations et que même en dimension 1 cela reste un sujet compliqué dont l'étude fait intervenir les groupes de Virasoro (dont je ne connais que le nom).
- Les trous noirs et les ondes gravitationnelles font partie des conséquences spectaculaires de la relativité générale.
- Enfin une remarque un peu vague : la plupart des théories de la physique sont non-linéaires. Mais je pense que la non-linéarité de la relativité générale est plus fondamentale et plus forte en un certain sens.

1.4 Motivations pour étudier la gravitation quantique

On va lister quelques motivations qui expliquent que la recherche d'une théorie de la gravitation quantique est considérée comme le problème majeur de la physique théorique. Nous allons les séparer, pour plus de clarté.

- **Motivations du point de vue de la physique des particules et de la théorie des champs**
 1. Une théorie quantique des champs vit sur \mathbb{R}^n , c'est à dire qu'elle possède des degrés de liberté à toutes les échelles possibles. Ceci est à l'origine des divergences, renormalisables ou non, en QFT. La notion même de « toutes les échelles » est pour le moins problématique en physique. De façon heuristique, la gravitation quantique produit une longueur fondamentale, la longueur de Planck, qui pourrait être considérée comme un « cut-off » permettant de se débarrasser de tous les degrés de liberté au-delà. On aurait alors une solution claire et nette aux problèmes des divergences en QFT.
 2. Le modèle standard ne dit rien sur la gravitation. La mécanique quantique étant notre meilleure théorie de la dynamique, on doit chercher à savoir ce qu'elle dit de la gravitation.
 3. Dans le modèle standard, les constantes de couplages dépendent explicitement de l'énergie. Il se trouve que les constantes de l'interaction électromagnétique, faible et forte, convergent à une énergie de l'ordre de 10^{16} GeV. Ceci est une indication qu'une unification entre ces trois forces est peut-être possible. Mais il y a plus : cette énergie est relativement proche de l'énergie de Planck $E_p \approx 10^{19}$ GeV (si on inclue la supersymétrie je pense), ceci pourrait donc indiquer qu'une unification des trois forces du modèle standard aura à traiter aussi de la gravitation quantique.

– Motivations du point de vue de la relativité générale

1. La présence de singularités dans la relativité générale montre que la théorie est incapable de décrire le champ gravitationnel à de très petites échelles.
2. Du point de vue de la relativité générale, une théorie quantique des champs qui « se passe » sur un espace-temps fixe n'a tout simplement pas de sens (sauf bien sûr dans certaines approximations). Selon la relativité, il n'y a pas de scène où les champs de la physique se propagent. Elle donne plutôt une vision purement relationnelle où toute notion d'espace de fond (background) est absente. Il est alors nécessaire de modifier la théorie quantique des champs pour devenir une théorie sans espace de fond (background independent).

Il y a bien sûr de nombreuses autres motivations. Pourtant il n'existe pas de preuve qui implique que la quantification de la gravitation est nécessaire. Par exemple, dans un article de 1933, Bohr et Rosenfeld démontrent que le champ électromagnétique *doit* être quantifié pour être cohérent avec la nature quantique de la matière avec laquelle il interagit. Un tel argument est absent en gravitation.

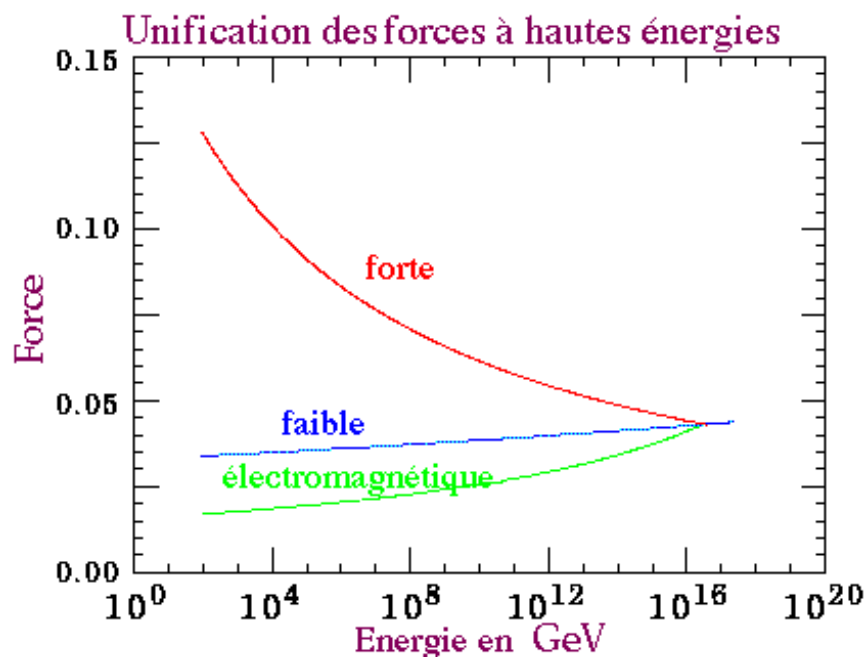


FIG. 1 – Convergence des constantes de couplage du modèle standard à haute énergie

1.5 Gravitation quantique perturbative

1.5.1 La non-renormalisabilité de la relativité générale

Vu le succès phénoménal du modèle standard, il est naturel d'essayer d'appliquer les méthodes de la théorie quantique des champs (QFT) à l'interaction gravitationnelle. C'est le programme qu'on désigne sous le nom de quantification covariante. Pour situer ce programme par rapport à d'autres approches de la gravitation quantique, voir la section suivante. Mais pour le moment nous allons examiner de plus près ce programme car il est le prolongement naturel des méthodes du modèle standard.

La procédure usuelle pour quantifier une théorie des champs est une procédure perturbative : si la théorie libre est linéaire, donc exactement résoluble, l'inclusion d'interactions rend la théorie (par définition d'une interaction) non linéaire. Résoudre la théorie exactement est alors impossible. On est donc réduit à la théorie des perturbations. Par exemple on va considérer un photon qui se propage librement, puis on va inclure une petite interaction qui sera traitée perturbativement. Essayons d'appliquer ceci à la gravitation. Le champ à quantifier ici est la métrique elle-même $g_{\mu\nu}$.

Un traitement perturbatif dans le cas de la gravitation exige alors de séparer la métrique totale $g_{\mu\nu}$ en une partie fixe et des fluctuations qui elles seront dynamiques et qui seront traitées perturbativement.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \text{background fixe} + \text{fluctuations} \quad (10)$$

Or cette séparation est très problématique. En effet toutes les QFT usuelles vivent sur un espace temps $\eta_{\mu\nu}$ minkowskien fixe. Ce background non dynamique est d'une importance fondamentale à la théorie. La notion de causalité par exemple, qui s'exprime en théorie des champs par la commutation des observables séparées par des intervalles de type espace en est complètement dépendante, puisque c'est la métrique qui permet de mesurer la distance entre deux évènements :

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 = \eta_{\mu\nu}(x - y)^\mu(x - y)^\nu < 0 \quad (11)$$

la partie fixe $\eta_{\mu\nu}$ définit la structure causale, c'est à dire le passé et le futur de chaque point (on parle de la structure de cônes de lumières). Cependant, la séparation qu'on a effectuée dans le champ gravitationnelle $g_{\mu\nu}$, et qui est nécessaire à la théorie des perturbations, est arbitraire, c'est à dire qu'on peut très bien choisir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} \quad (12)$$

les métriques $\eta_{\mu\nu}$ et $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ donnant une structure causale différente. Ceci rend difficile de donner un sens précis à ces background. De toute façon selon la relativité générale la vraie structure causale est donnée par la métrique totale $g_{\mu\nu}$. Cette procédure perturbative est donc pour le moins douteuse.

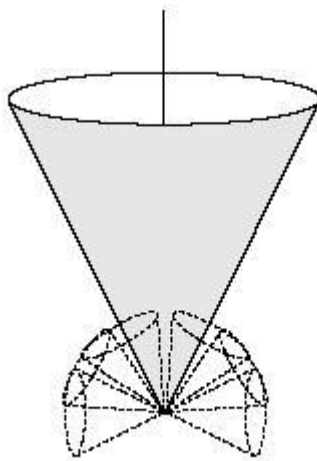


FIG. 2 – Plusieurs cônes de lumières sont possibles en chaque point.

Si l'on choisit d'ignorer pour un moment tout ceci, et qu'on procède à la quantification perturbative, on trouve (t'Hooft et d'autres) que la théorie est non renormalisable (plus précisément, et c'est fondamental, la théorie est non *perturbativement* renormalisable), c'est à dire que l'on n'arrive pas à contrôler les infinis qui sont dans la théorie, comme on sait par exemple le faire en électrodynamique quantique. Cette non-renormalisabilité suggère alors, encore une fois, que l'utilisation d'un background pour quantifier la gravitation est la mauvaise voie pour écrire une théorie de la gravitation quantique. Alain Connes résume très bien la situation de la quantification perturbative dans [Connes]

« While this prescription works remarkably well for the quantization of the classical fields involved in the standard model provided one uses the technique of renormalization, this latter perturbative technique fails dramatically when one tries to deal with the gravitational field $g_{\mu\nu}$. In many ways this result is not surprising. Indeed many of the basic notions of the traditional formalism of Quantum Field Theory (QFT), such as particles, scattering matrices, etc \dots heavily rely on the flat geometry of Minkowski space and the related Poincare symmetry group. Treating the quantization of the $g_{\mu\nu}$ in the same way

would -if successful- produce a quantum field theory of the $g_{\mu\nu}$ on Minkowski space : a strange result indeed when viewed from the geometric standpoint! »

Toutes ces considérations motivent alors une approche de la gravitation quantique qui ne dépend pas d'une géométrie fixe quelconque (background indépendant). Le défi à relever est la construction d'une théorie quantique des champs en l'absence d'une notion préétablie de distance : une théorie quantique des champs sans métrique. Beaucoup plus de détails se trouvent dans [Perez].

Enfin, afin de motiver encore plus le choix de développer une gravitation quantique non perturbative, je vais exposer dans la suite, très brièvement, un exemple d'une théorie qui est non perturbativement renormalisable, mais dont on sait construire exactement la théorie quantique non perturbative (qui elle ne présente pas de problèmes de divergences), il s'agit de la gravitation quantique en $2 + 1$ dimensions. En effet, le processus de quantification et celui du traitement perturbatif sont en quelque sortes deux « limites » qui ne commutent pas, tout du moins c'est ainsi que je comprend les choses.

1.5.2 Un exemple : la gravitation quantique en $2 + 1$ dimensions

La relativité générale est une théorie qui dépend de façon cruciale de la dimension dans laquelle elle est formulée. Par exemple en dimension 2 (une dimension de temps et une d'espace), l'action de la relativité générale (action d'Hilbert-Einstein) se simplifie énormément (pour le sens des différents termes voir l'annexe 5) :

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^2x \sqrt{-g} R = \text{courbure totale} = 4\pi\chi \quad (13)$$

ou χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface, un invariant topologique. Le théorème d'Euler établit que $\chi = 2 - 2h$ où h est le genre, c'est à dire le nombre de trous dans la surface (notion bien définie uniquement en dimension 2). L'action de la relativité générale se trouve donc beaucoup simplifiée en dimension 2.

De même, la gravitation en dimension 3 (2 d'espaces et une de temps) est également très spéciale : c'est ce qu'on appelle une théorie topologique. Une définition (que je ne comprends pas très bien) d'une théorie topologique est qu'elle ne possède pas de degrés de liberté locaux. Ce qui nous importe ici c'est que la gravitation en 3D est très différente et beaucoup plus simple que dans la dimension 4 (la « vraie » dimension). On peut démontrer que tout comme la gravitation en 4D, la théorie en 3D est non perturbativement renormalisable. Cependant Witten a réussi dans le célèbre article [Witten] à profiter du caractère topologique de la gravitation en 3D, pour construire la théorie quantique équivalente. Je ne comprends pas cet article, mais le seul fait qu'il existe une théorie des champs non perturbativement renormalisable, mais dont la quantification (non-perturbative) donne une théorie quantique des champs sans divergences pathologiques, est une motivation pour tenter de formuler une théorie non perturbative de la gravitation en 4D.

La théorie qui fait l'objet de ce stage se situe dans cette perspective. Avant de la décrire plus en détail, il est important de parler brièvement d'autres tentatives de contourner le problème de la non-renormalisabilité de la relativité générale.

1.6 Différentes approches

La seule vraie contrainte qu'on peut raisonnablement demander à une théorie qui va au-delà du modèle standard et qui inclue la gravitation de vérifier est de redonner la relativité générale et le modèle standard dans une certaine limite (et bien sûr de fournir des prédictions de nouveaux phénomènes qui soient vérifiable par l'expérience). Cette contrainte nous laisse beaucoup de choix que je vais lister ici en suivant les grandes lignes de l'excellente présentation donnée dans [Isham]. Le but de cette partie est de montrer que la construction d'une nouvelle théorie fondamentale de la nature est tout sauf simple.

1. **Quantifier la relativité générale** : l'idée est de commencer par la théorie des champs classique qu'est la relativité générale est d'appliquer un certain algorithme de quantification. Le champ

à quantifier ici est le champ gravitationnel, c'est à dire la métrique. Il existe de nombreux algorithmes de quantification :

- *La quantification covariante* : c'est la tentative d'écrire une théorie quantique des champs des fluctuations de la métrique sur un espace de fond minkowskien. Cette approche a été initié par des physiciens comme Rosenfeld et Pauli dans les années trente. Feynman et DeWitt ont également été à l'origine d'avancées majeures. Finalement t'Hooft, Veltmann et d'autres ont montré que cette théorie est non renormalisable. On a discuté le sens de cette non-renormalisabilité un peu en détail dans la section précédente. Les physiciens voulant poursuivre ce programme ont été donc obligés de considérer que la relativité générale n'est qu'une approximation de basse énergie d'une théorie des champs plus générale. Ceci a abouti à la théorie des cordes. La théorie des cordes est la théorie de la gravitation quantique la plus développée à nos jours (mais elle entend également unifier les 4 interactions fondamentales). C'est une théorie élégante, qui utilise des mathématiques très puissantes telles que la géométrie algébrique ou la géométrie non commutative.
- *La quantification canonique* : celle-ci est basée sur une reformulation hamiltonienne de la relativité générale. Dans cette approche on ne se réfère à aucune géométrie de fond (background). Initiée par Bergmann et Dirac dans les années cinquante, la construction de la structure canonique de la relativité générale s'est avérée très difficile. Ceci est dû à l'existence de contraintes entre les variables conjugués de la théorie, ce qui pose de grandes difficultés lors de la quantification. Plus précisément les variables de la théories sont les 3-métriques $g_{ab}(x)$ et leurs moments conjugués $p^{ab}(x)$. Il existe alors des contraintes qu'on note traditionnellement

$$\mathcal{H}_a(x) = 0 \quad \mathcal{H}_\perp(x) = 0 \quad (14)$$

\mathcal{H}_a et \mathcal{H}_\perp étant des fonctions compliquées de g et p . Les équations formelles de la théorie ont été finalement écrites par Wheeler et DeWitt dans les années soixante. C'est la fameuse équation de Wheeler-DeWitt qui est une équation différentielle fonctionnelle, c'est à dire en gros une équation aux dérivées partielles mais avec un nombre infini de variables. Cette équation s'est avérée être beaucoup trop mal définie mathématiquement. Les travaux se basant sur elle et qui avaient un sens autre que purement formel étaient obligés de tronquer le champ gravitationnel à un nombre fini de degrés de liberté, afin de réduire l'équation de Wheeler-DeWitt à une équation aux dérivées partielles à un nombre fini de variables. Ce n'est qu'en 1986 que le programme de la quantification canonique a connu une avancée majeure : Ashtekar a trouvé un nouvel ensemble de variables canoniques qui simplifient considérablement les contraintes \mathcal{H}_a et \mathcal{H}_\perp . L'exploitation de ces nouvelles variables au niveau quantique est à l'origine du programme de la *gravitation quantique à boucles*. La *Group Field Theory* est l'un des développements de ce programme.

- *La quantification à la Feynman* : elle est basée sur l'intégrale de chemin. Ce programme a été initié par Misner dans [Misner]. Dans cette formulation, la sommation portera donc sur toutes les configurations du champ gravitationnel, i.e. les 4-géométries g . Pour calculer les amplitudes de probabilités, on considère par exemple une variété de topologie triviale \mathcal{M} , avec deux composantes de bords disjointes S et S' et des conditions aux limites, i.e. 3-géométries, $h(S)$ et $h'(S')$ données. En notant S_{GR} l'action de la relativité générale, l'amplitude de transition prend la forme

$$Z(h(S), h'(S')) = \int_{g/g(S)=h(S) \text{ et } g(S')=h'(S')} \mathcal{D}[g] e^{iS_{GR}(g)} \quad (15)$$

Il est très difficile de donner un sens mathématique précis à l'intégrale de Feynman que nous avons écrite. Elle est donc purement formelle et doit être considérée comme un problème à résoudre plutôt qu'une solution. Au sein de la gravitation quantique à boucles, la quantification à la Feynman et la quantification canonique ont tendance à fusionner.

2. **La relativité générale comme limite de basse énergie issue de la quantification d'une théorie classique différente** : l'idée est qu'on peut retomber sur la relativité générale de la

façon suivante

$$\text{Théorie classique 1} \xrightarrow{\text{quantification}} \text{Théorie quantique} \xrightarrow{\text{limite classique}} \text{Théorie classique 2} \\ = \text{Relativité générale}$$

Comme on l'a déjà dit c'est le cas de la théorie des cordes.

3. **La relativité générale comme limite de basse énergie d'une théorie quantique qui n'est pas la quantification d'une certaine théorie classique** : Dans la plupart des cas, on construit une théorie quantique des champs en écrivant une théorie classique des champs et en la quantifiant. Cette procédure paraît très bien justifiée dans le cas de l'électromagnétisme par exemple. La théorie classique de l'électromagnétisme est une théorie qui fait parfaitement sens à de nombreuses échelles. La quantifier veut dire l'étendre à un domaine encore plus grand : le domaine où règne la mécanique quantique. Ce genre d'arguments n'est plus valable, du moins je pense, pour une théorie de l'interaction forte par exemple : que veut dire une théorie classique de l'interaction forte ? Cependant, pour construire la chromodynamique quantique, on commence comme d'habitude par écrire un lagrangien classique (peut être car l'implémentation des symétries est plus simple sur théorie classique). Je n'ai jamais vu de théorie quantique construite directement sans passer par une théorie classique. Pourtant il n'y a pas de raisons a priori qui implique qu'une théorie de la gravitation quantique doit être obtenue par quantification d'une théorie classique. Selon [Isham], un exemple de telle théorie est la théorie des algèbres de courant, intensivement étudiée en 1960 comme théorie candidate pour décrire l'interaction forte.
4. **Commencer par une théorie radicalement différente de la relativité générale et de la mécanique quantique** : bien sûr ce choix est toujours possible, même si la construction d'une telle théorie, sans le guide fourni par les théories déjà existantes, doit être très difficile.

2 La Group Field Theory

2.1 La Group Field Theory (GFT)

La *Group Field Theory* (GFT) est un développement de la gravitation quantique à boucles (*Loop Quantum Gravity*), une théorie que j'ai présentée dans la section précédente. La GFT se veut une théorie quantique des champs **de** l'espace temps, par opposition au cas usuel d'une théorie quantique des champs **sur** l'espace temps. Une façon parmi d'autres d'introduire la GFT est de commencer par écrire une intégrale de chemin pour la gravitation (15). De nombreux travaux suggèrent que les fluctuations quantiques de la géométrie sont insuffisantes et qu'il faut tenir compte également de celles de la topologie, ce qui fait de Z un objet mathématique extrêmement mal défini. La GFT est un moyen de donner un sens à cette intégrale en se plaçant dans un contexte discret : on triangulise l'espace. Une géométrie est donc caractérisée par un nombre fini, au pire dénombrable, de variables. Le super espace (ensemble de toutes les 3-géométries) devient donc discret. Ceci facilite beaucoup la tâche de définir une théorie quantique des champs là-dessus. Le choix des variables qui vont décrire la géométrie est une question très importante. La GFT fait un choix motivé par la description de la relativité générale à l'aide des variables d'Ashtekar dont j'ai parlé dans la section précédente. Les détails sont très techniques et je ne les comprends que d'une manière vague. Je vais donc décrire le formalisme de la GFT sans expliquer pourquoi c'est une quantification de la gravitation, pour une excellente présentation des GFT voir [Oriti 2006].

La GFT est une théorie de champs scalaires complexes, vivant en dimension D sur le groupe de Lorentz $SO(D-1, 1)$ dans le cas minkowskien ou le groupe $SO(D)$ dans le cas euclidien.

$$\phi : \mathbb{G}^D \longrightarrow \mathbb{C} \\ (g_1, g_2, \dots, g_D) \longmapsto \phi(g_1, g_2, \dots, g_D)$$

La GFT possède également la symétrie suivante

$$\phi(g_1, \dots, g_D) = \phi(g_1 \tilde{g}, \dots, g_D \tilde{g}) \quad \forall \tilde{g} \in \mathbb{G}$$

L'action de la théorie libre s'écrit

$$S_D(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{G}^D} \prod_{i=1}^D dg_i d\tilde{g}_i \phi(g_1, \dots, g_D) \mathcal{K}(g_1 \tilde{g}_1^{-1}, \dots, g_D \tilde{g}_D^{-1}) \phi(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_D) \quad (16)$$

où \mathcal{K} est un le terme cinétique, qui dans les modèles les plus simples est pris égale à

$$\mathcal{K}(g_1 \tilde{g}_1^{-1}, \dots, g_D \tilde{g}_D^{-1}) = \delta(g_1 \tilde{g}_1^{-1}, \dots, g_D \tilde{g}_D^{-1})$$

L'intégration ici s'effectue sur le groupe \mathbb{G} . En effet il existe sur la plupart des groupes une mesure invariante unique qui permet de définir l'intégrale de façon unique, il s'agit de la mesure de Haar.

Ce qui est très intéressant c'est que la GFT est très similaire à une théorie des champs ordinaire. En effet la plupart des groupes peuvent être munis d'une métrique, la métrique de Killing-Cartan. La GFT vit donc sur un espace métrique tout comme les QFT ordinaires, la différence (énorme) étant que la métrique de la GFT n'a rien a voir avec l'espace temps. En ce sens, la GFT a l'avantage de ne pas dépendre d'une géométrie de fond (background) tout en restant formellement très similaire aux QFT ordinaires pour permettre d'utiliser toutes les techniques usuelles de la théorie des champs.

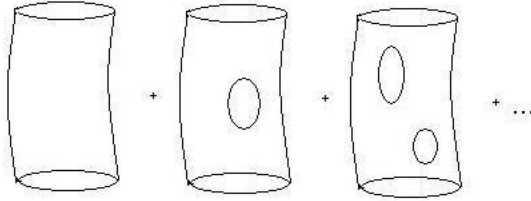


FIG. 3 – Sommes sur les topologies

2.2 La Generalised *Group Field Theory* (GGFT)

Pour différentes raisons, mon maître de stage a généralisé la GFT dans [Oriti Generalized]. La Generalised *Group Field Theory* (GGFT) contient des paramètres supplémentaires qui sont des sortes de temps propres τ_i . La nouvelle action de la théorie s'écrit

$$S_D(\phi) = \int_{\mathbb{G}^D} d^D g \int_{\mathbb{R}^D} d^D \tau \phi^\dagger(g_i, \tau_i) \left[\prod_{i=1}^D (\square_i + i\partial_{\tau_i}) \right] \phi(g_i, \tau_i) + c.c \quad (17)$$

où \square_i est l'opérateur d'Alembertien sur le groupe \mathbb{G} relatif à la variable g_i . En effet les groupes \mathbb{G} qu'on considère sont des groupes de Lie et donc des variétés, il est alors possible de définir une dérivation dessus en paramétrisant les éléments du groupe, le résultat étant indépendant de la paramétrisation choisie. La GGFT redonne dans une certaine limite la GFT. La GGFT ressemble encore plus à une QFT ordinaire. Notamment, et c'est le but de mon stage, on peut espérer construire l'analyse hamiltonienne et l'espace de Fock de la théorie. En effet on ne sait pas définir de telles structures pour la GFT en raison de l'absence d'un paramètre « temporel » par rapport auquel effectuer l'analyse hamiltonienne en construisant un moment conjugué, un hamiltonien, et des opérateurs création et annihilation, ...

3 Théorie quantique des champs paramétrisée

Nous avons vu que le lagrangien de la GFT comporte des paramètres supplémentaires, que nous avons appelé des temps propres. Dans cette section nous allons nous attarder sur ce type de théories que nous désignerons dorénavant sous le nom de théories des champs généralisées. La procédure

de quantification des champs usuelle brise la manifeste invariance de Lorentz, puisque les règles de commutations sont imposées dans un référentiel précis. Après la quantification, il est donc nécessaire de vérifier que l'invariance relativiste est toujours maintenue dans la théorie. Pour être plus être plus précis revoyons l'algorithme de quantification canonique appliqué au cas le plus simple d'un champ scalaire réel libre ϕ (de Klein-Gordon). Le lagrangien de cette théorie est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

La quantification canonique commence par la définition d'un moment conjugué au champ $\phi(t, \vec{x})$ et d'une densité hamiltonienne, données par ¹

$$\pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t\phi)} = \partial_t\phi(x) \quad \mathcal{H} = \pi\partial_t\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \quad (18)$$

Par analogie à la théorie quantique d'un nombre fini de particules, on impose les relations de commutation suivantes² entre le champ et son moment

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (19)$$

Il est clair que ces relations brisent a priori l'invariance relativiste, puisqu'elles sont définies dans un référentiel donné. L'un des buts derrière le développement des théories de champs généralisées est de permettre une quantification explicitement covariante des théories de champs, ce qui est un grand avantage. Nous allons dans ce qui suit construire la théorie libre la plus simple de ce type, en commençant par une théorie classique d'une particule, puis en considérant la théorie des champs classiques correspondante et enfin nous allons la quantifier. Dans le début de cette section je vais suivre à quelques détails près [Holster].

3.1 Théorie classique

Dans un système d'unités où la vitesse de la lumière c est prise comme l'unité, on définit le quatre vecteur position par $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3)$ et l'élément de longueur (qui est également le temps propre car $c = 1$) par $ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On a donc ainsi en toute généralité la condition de normalisation du quadrivecteur vitesse $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = 1 \quad (20)$$

Maintenant on s'intéresse au mouvement d'une particule relativiste de masse au repos m et de charge q dans un champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ (dans la grande majorité de ce rapport, on n'étudiera que des théories libres en fixant $F^{\mu\nu} = 0$). Les (quatre) équations du mouvement s'écrivent alors

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q F^{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (21)$$

A ces quatre équations il faut ajouter la contrainte de normalisation du quatre vecteur vitesse comme on vient de le voir

$$\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = \text{constante} = 1 \quad (22)$$

¹Ici est le seul endroit du rapport où je ne vais pas mélanger les dérivées fonctionnelles $\frac{\delta}{\delta(\)}$ avec des simples dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial(\)}$.

²Durant le stage j'ai été heureux de découvrir dans la littérature que les relations de commutations de la mécanique quantique, les représentations des opérateurs position et impulsion, le choix de l'espace de Hilbert ont des justifications mathématique que j'essaie de résumer dans l'annexe 5

Pour écrire une équation du mouvement indépendante de la masse m , on introduit un nouveau paramètre τ définie par $s = m\tau$. Les équations du mouvement et la contrainte deviennent

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = qF^{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \quad \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = m^2 \quad (23)$$

Cet ensemble d'équations doit être compris dans le langage des ensembles statistiques : l'équation du mouvement est valable pour toutes les particules : elle ne voit pas leur masse. La contrainte permet quant à elle de spécifier les membres de l'ensemble statistique auxquels on s'intéresse. Mais justement, on a maintenant le choix d'oublier la contrainte et ne s'intéresser qu'à la description statistique du système : au lieu d'étudier une particule relativiste de masse donnée, on étudie un ensemble de particules avec une certaine distribution statistique de masse.

Nous allons maintenant écrire les équations du mouvement dans la forme hamiltonienne, bien adaptée à la description statistique d'un système. Tout d'abord, on définit le moment conjugué par

$$p^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} + qA^\mu\right) \quad (24)$$

où A^μ est le potentiel définissant le tenseur champ électromagnétique par $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. On introduit également les crochets de Poisson entre deux quantités A et B

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p^\mu}\frac{\partial B}{\partial x_\mu} \quad (25)$$

Finalement on a l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu \quad (26)$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \frac{dH}{dp^\mu} = \{x^\mu, H\} \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} &= -\frac{dH}{dx^\mu} = \{p^\mu, H\} \end{aligned} \quad (27)$$

Pour souligner la nature statistique de notre étude, on peut définir la densité de l'espace de phase $\rho(x, p, \tau)$ obéissant à une équation de Liouville

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \{\rho, H\} = 0 \quad (28)$$

Dorénavant nous allons étudier que les théories libres ($F^{\mu\nu} = 0$). Dans ce cas l'hamiltonien est simplement égal à $\frac{1}{2}m^2$.

3.2 Théorie classique des champs et première quantification

Le fait d'avoir mis les équations du mouvement dans une forme hamiltonienne suggère une quantification canonique de la théorie. On va donc suivre les étapes de la quantification usuelle mais par rapport au paramètre τ . On promeut donc les variables x^μ et p_μ en opérateur auto-adjoint, que nous continuerons à noter par les même lettres. Le commutateur (à temps égaux) de la théorie quantique est obtenu de la façon habituelle

$$\{x^\mu(\tau), p_\nu(\tau)\} = \delta_\nu^\mu \longrightarrow [x^\mu, p_\nu] = i\delta_\nu^\mu \quad (29)$$

Les équations du mouvement deviennent alors les équations d'Heisenberg

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \frac{1}{i}[x^\mu, H] \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \frac{1}{i}[p^\mu, H] \end{aligned} \quad (30)$$

Dans le cas usuel où l'hamiltonien est égal à l'énergie du système, la quantification a pour conséquence de fournir un spectre continu et/ou discret de valeurs possibles de l'énergie. Ici, on a vu que l'opérateur H représente la masse au carré, donc la quantification donnera une théorie avec un spectre continu et/ou discret de valeurs de la masse des particules. La masse dans ce genre de théorie n'est donc plus un paramètre externe, mais devient une quantité dynamique, dont la valeur (ou plutôt l'amplitude de probabilité) peut être prédite, exactement comme la position ou l'impulsion. D'ailleurs, de nombreux travaux ont tenté, avec plus ou moins de succès, de déduire les masses des particules du modèle standard en se basant sur ce type de théories.

On définit un opérateur évolution unitaire $U(\tau)$ qui effectue l'évolution temporelle, c'est à dire

$$\begin{aligned}x^\mu(\tau) &= U^{-1}(\tau)x^\mu(0)U(\tau) \\p^\mu(\tau) &= U^{-1}(\tau)p^\mu(0)U(\tau)\end{aligned}\tag{31}$$

L'opérateur d'évolution U permet de passer d'un vecteur d'état $|\chi\rangle$ dans la représentation d'Heisenberg (indépendante du temps τ) à un vecteur $|\phi(\tau)\rangle$ de Schrödinger par

$$|\phi(\tau)\rangle = U(\tau) |\chi\rangle\tag{32}$$

Les équations du mouvement d'Heisenberg permettent alors d'écrire une équation différentielle pour U

$$HU + \frac{1}{i} \frac{dU}{d\tau} = 0\tag{33}$$

Comme d'habitude, la relation de commutation suggère la représentation suivante du moment dans l'espace des coordonnées

$$p^\mu = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\tag{34}$$

En utilisant ceci et la forme explicite de H , on obtient alors dans la base des coordonnées l'équation suivante pour la fonction d'onde

$$\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu + \frac{1}{i}\partial_\tau\right]\phi(x, \tau) = 0\tag{35}$$

L'interprétation de la fonction d'onde est la suivante : la probabilité de trouver la particule dans le point d'espace-temps $x = (\vec{x}, t)$ est donnée par $|\phi(x, \tau)|^2 d^4x$. Pour pouvoir donner une telle interprétation de la fonction d'onde, il est nécessaire que la somme totale des probabilités soit normalisable à l'unité, et qu'elle le reste au cours de l'évolution selon τ . En d'autres termes $\int d^4x |\phi(x, \tau)|^2$ doit être une constante (finie) du mouvement. Pour montrer cela, écrivant les deux équations du mouvement de ϕ et ϕ^\dagger

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu + \frac{1}{i}\partial_\tau\right]\phi(x, \tau) &= 0 \\ \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu - \frac{1}{i}\partial_\tau\right]\phi^\dagger(x, \tau) &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

En ajoutant ces deux équations on obtient

$$\partial_\tau(\phi^\dagger\phi) + \frac{i}{2}\left[\phi^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger\right] = 0\tag{37}$$

Or le deuxième terme est une divergence

$$\partial_\tau(|\phi|^2) + \frac{i}{2}\partial_\mu\left[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger\right] = 0\tag{38}$$

En intégrant cette équation de conservation (et en supposant que les termes de surfaces s'annulent comme toujours), on a donc la conservation de la probabilité souhaitée.

$$\partial_\tau \int d^4x |\phi|^2 = -\frac{i}{2} \int d^4x \partial_\mu \left[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger\right] = 0\tag{39}$$

Remarquons que l'interprétation de la fonction d'onde en terme de densité d'amplitude de probabilité sur l'espace-temps (par opposition au cas usuel d'une densité sur l'espace à un temps donné) souligne encore une fois le rôle parfaitement symétrique que jouent l'espace et le temps dans notre théorie.

Comme toujours, une théorie quantique à une seule particule (première quantification) peut être interprétée comme une théorie classique des champs qui pourra être quantifiée à son tour (deuxième quantification). C'est ce que nous allons faire dans la prochaine section.

3.3 Théorie quantique des champs (deuxième quantification)

La densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2i} [(\partial_\tau \phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger \partial_\tau \phi] + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) \quad (40)$$

redonne l'équation du mouvement de la théorie, à savoir

$$\left[\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{i} \partial_\tau \right] \phi(x, \tau) = 0 \quad (41)$$

Comme on a affaire à une équation linéaire, il est naturel de passer dans l'espace de Fourier pour qu'elle devienne algébrique

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \, d\alpha \, A(k, \alpha) e^{-i(kx + \alpha\tau)} \quad (42)$$

$$\widetilde{\partial_\mu \phi} = -ik_\mu \widetilde{\phi} \quad \widetilde{\partial_\tau \phi} = -i\alpha \widetilde{\phi} \quad (43)$$

Ainsi l'équation du mouvement devient dans l'espace de Fourier

$$\left(\alpha + \frac{k^2}{2} \right) \widetilde{\phi} = 0 \quad (44)$$

cela signifie que $\widetilde{\phi} \neq 0$ sur l'ensemble de points tels que $\alpha + \frac{k^2}{2} = 0$. Il est donc facile de construire une décomposition du champ qui obéisse explicitement à l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} \phi(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \, d\alpha \, \delta\left(\alpha + \frac{k^2}{2}\right) A(k, \alpha) e^{-i(kx + \alpha\tau)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \, A(k, k^2) e^{-i(kx - \frac{k^2}{2}\tau)} \end{aligned} \quad (45)$$

Finalement le champ s'écrit

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \, a(k) e_k \quad \text{avec} \quad a(k) = A(k, k^2) \quad \text{et} \quad e_k = e^{-i(kx - \frac{k^2}{2}\tau)} \quad (46)$$

En vue de quantifier de façon canonique le système, nous allons écrire la théorie sous forme hamiltonienne. Pour cela on commence par définir les moments conjugués par (comme d'habitude, ϕ et ϕ^\dagger doivent être traités comme deux champs indépendants)

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau \phi)} = -\frac{i}{2} \phi^\dagger \quad \pi_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau \phi^\dagger)} = \frac{i}{2} \phi \quad (47)$$

On construit alors l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \int d^4 x \left[\pi_\phi \partial_\tau \phi + \pi_{\phi^\dagger} \partial_\tau \phi^\dagger - \mathcal{L} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) \end{aligned} \quad (48)$$

Dans l'espace de Fourier l'hamiltonien prend la forme simple suivante

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 a^\dagger(k) a(k) \quad (49)$$

Maintenant nous pouvons procéder à la quantification de la théorie. On promeut donc les fonctions $\phi, \phi^\dagger, \pi_\phi, \pi_{\phi^\dagger}, a(k), a^\dagger(k)$ en opérateur, que nous continuerons à noter par les mêmes lettres. Il reste à choisir la statistique, fermionique ou bosonique, suivie par les particules.

Comme on va voir, si on demande à l'hamiltonien d'être un opérateur positif (c'est à dire que son spectre soit positif), on est obligé de conclure que les particules décrites par la théorie sont des fermions. Voyons cela de plus près : le terme k^2 dans l'hamiltonien peut être positif ou négatif. L'hamiltonien n'est donc pas positif. Si on choisit que les particules sont des bosons, on ne peut pas régler ce problème. Par contre, si on choisit de quantifier les particules selon une statistique de Fermi-Dirac, une redéfinition des opérateurs permet d'avoir un hamiltonien positif. En effet, le rôle symétrique joué par les opérateurs création / annihilation dans la relation d'anticommution utilisée pour quantifier un système de fermions, permet de redéfinir l'opérateur $b(k) = a^\dagger(k)$ pour les états de $k^2 < 0$ et de réinterpréter $b(k)$ comme l'opérateur annihilation au lieu de $a(k)$. On a ainsi

$$\phi(x, \tau) = \int_{k^2 > 0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a(k) e_k + \int_{k^2 < 0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} b^\dagger(k) e_k \quad (50)$$

Les relations d'anticommutions a temps égaux entre les champs et les moments s'écrivent

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x, \tau), \pi_\phi(y, \tau) \right\} &= i\delta^4(x - y) \\ \left\{ \phi^\dagger(x, \tau), \pi_{\phi^\dagger}(y, \tau) \right\} &= i\delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (51)$$

Tous les autres anticommutateurs étant nuls. Les relations d'anticommutions entre les opérateurs créations / annihilation sont

$$\begin{aligned} \left\{ a(k), a^\dagger(h) \right\} &= (2\pi)^4 \delta^4(k - h) \quad \text{si } k^2 > 0 \\ \left\{ b(k), b^\dagger(h) \right\} &= (2\pi)^4 \delta^4(k - h) \quad \text{si } k^2 < 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Le nouveau hamiltonien est positif et s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \int_{k^2 > 0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 a^\dagger(k) a(k) + \frac{1}{2} \int_{k^2 < 0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} |k^2| b^\dagger(k) b(k) \quad (53)$$

4 Quantification canonique de la GGFT sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$

Nous allons nous attaquer maintenant à la quantification de la GGFT. Bien que le cas le plus intéressant physiquement est celui de la dimension 4, on va faire les calculs en dimension 2. Il est à remarquer que les calculs et les résultats en dimension 4 sont exactement les mêmes mais plus longs. Bien évidemment ce sont les calculs en dimension 4, que j'ai déjà faits, qui seront publiés.

Comme on l'a déjà vu, la GGFT est une théorie de champ scalaire complexe qui vit sur $(\mathbb{G} \times \mathbb{R})^2$ où \mathbb{G} est un certain groupe. Pour simplifier l'étude, nous allons étudier la même théorie définie sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2$. Les difficultés et les solutions que nous allons trouver s'appliqueront alors directement sur le cas où le champ est définie sur un $(\mathbb{G} \times \mathbb{R})^2$. Pour plus de détails voir la section suivante qui traite de la quantification sur $SU(2)$.

4.1 Les difficultés du lagrangien inhabituel de la GGFT

On considère le champ scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \quad (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, \tau_1, x_2, \tau_2) &\longmapsto \phi(x_1, \tau_1, x_2, \tau_2) \end{aligned}$$

On définit alors le lagrangien (réel) de la GGFT, où $\square_i = \partial_{x_i}^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \phi^\dagger \left[\prod_{i=1}^2 (\square_i + i\partial_{\tau_i}) \right] \phi + \text{c.c} \\ &= \phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i\phi^\dagger \square_1 \partial_{\tau_2} \phi + i\phi^\dagger \square_2 \partial_{\tau_1} \phi + \phi \square_1 \square_2 \phi^\dagger - i\phi \square_1 \partial_{\tau_2} \phi^\dagger - i\phi \square_2 \partial_{\tau_1} \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi - \phi \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger\end{aligned}\quad (54)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ ϕ est donc

$$(\square_1 + i\partial_{\tau_1})(\square_2 + i\partial_{\tau_2})\phi = 0 \quad (55)$$

Dans un premier temps, on ne va pas considérer les solutions les plus générales de ces équations, on va plutôt s'intéresser aux sous-ensembles de solutions qui vérifient les 2 équations suivantes simultanément

$$\begin{aligned}(\square_1 + i\partial_{\tau_1})\phi &= 0 \\ (\square_2 + i\partial_{\tau_2})\phi &= 0\end{aligned}\quad (56)$$

Comme on a affaire à des équations linéaires, il est naturel de passer à l'espace de Fourier

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, d^2\alpha \, A(k, \alpha) \, e^{-i(kx + \alpha\tau)} \quad (57)$$

$$\widetilde{\partial_{x_i} \phi} = -ik_i \widetilde{\phi} \quad \widetilde{\partial_{\tau_i} \phi} = -i\alpha_i \widetilde{\phi} \quad (58)$$

Ainsi les équations du mouvement dans l'espace de Fourier deviennent

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - k_1^2) \widetilde{\phi} &= 0 \\ (\alpha_2 - k_2^2) \widetilde{\phi} &= 0\end{aligned}\quad (59)$$

Il est facile de construire une décomposition du champ qui obéisse explicitement aux équations du mouvement

$$\begin{aligned}\phi(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, d^2\alpha \, \left[\prod_{i=1}^2 \delta(\alpha_i - k_i^2) \right] A(k, \alpha) \, e^{-i(kx + \alpha\tau)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, A(k, k_1^2, k_2^2) \, e^{-i(kx + k_1^2\tau_1 + k_2^2\tau_2)}\end{aligned}\quad (60)$$

Finalement

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, a(k) \, e_k \quad \text{avec} \quad a(k) = A(k, k_1^2, k_2^2) \quad \text{et} \quad e_k = e^{-i(kx + k_1^2\tau_1 + k_2^2\tau_2)} \quad (61)$$

Le lagrangien de la GGFT présente plusieurs difficultés a priori. La plus manifeste est l'existence de plusieurs paramètres temporels et non d'un seul. On est donc face à une situation peu habituelle où il existe plusieurs directions d'évolution indépendantes. Je vais désigner ce type de lagrangien par lagrangien multi-temps. Le formalisme lagrangien d'une telle théorie multi-temps ne pose aucun problème : dans les équations d'Euler-Lagrange il suffira de considérer toutes les variations possibles du champ (en tenant compte de toutes les combinaisons possibles des dérivées). Cependant la quantification canonique est basée sur le formalisme hamiltonien qui privilégie une certaine coordonnée sur les autres. Cette coordonnée permet la définition d'un moment conjugué et d'une structure de crochets de Poisson. Ceci est à la base de la structure symplectique de l'espace des phases de la mécanique classique, structure géométrique extrêmement importante, surtout si on veut procéder à la quantification canonique de la théorie.

Comme on a plusieurs paramètres temporels, la question de comment définir le ou les moments conjugués au champ se pose. L'attitude la plus naturelle que j'ai suivie est de définir un moment relatif à chaque direction temporelle

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\tau_i} \phi)} \quad (62)$$

J'ai également essayé d'autres définitions telles que

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi)} \quad (63)$$

Après une recherche bibliographique, j'ai trouvé que l'analyse hamiltonienne des théories multi-temps a déjà été effectuée, dans un esprit très différent du nôtre³, par De Donder dans [De Donder]. Ce travail ne s'intéresse qu'aux théories non quantiques à une seule particule. Son adaptation aux théories classique des champs est immédiate. A partir du lagrangien $L(x, \partial_{t_1} x, \partial_{t_2} x, \dots)$, De Donder définit les moments et l'hamiltonien suivants

$$p^n = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{t_n} x)} \quad H = \sum_{n=1}^m p^n \partial_{t_n} x - L \quad (64)$$

On peut vérifier que l'on a des bonnes définitions car les équations du mouvements se mettent sous une forme tout à fait similaire aux équations d'Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t_n} &= \frac{\partial H}{\partial p^n} \\ \sum_{n=1}^m \frac{\partial p^n}{\partial t_n} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (65)$$

Si l'on utilise directement le lagrangien \mathcal{L} défini plus haut, on va obtenir des moments tous nuls. Ceci signifie que le Lagrangien \mathcal{L} est en quelque sorte singulier. Se débarrasser de ce problème est une tâche facile : on intègre par parties le lagrangien, ce qui n'a pas de conséquence sur les équations du mouvements. Bien sûr on peut intégrer par parties de différentes manière, mais elles sont toutes valables tant que tous les moments sont non nuls. Ainsi on redéfinit \mathcal{L} de la manière suivante

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i \square_1 \phi^\dagger \partial_{\tau_2} \phi + i \square_2 \phi^\dagger \partial_{\tau_1} \phi + \phi \square_1 \square_2 \phi^\dagger - i \square_1 \phi \partial_{\tau_2} \phi^\dagger - i \square_2 \phi \partial_{\tau_1} \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi - \phi \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger \quad (66)$$

Ensuite on définit les moments conjugués et l'hamiltonien par

$$\pi_\phi^1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \phi)} = i \square_2 \phi^\dagger \quad \pi_\phi^2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_2} \phi)} = i \square_1 \phi^\dagger \quad (67)$$

$$\pi_{\phi^\dagger}^1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \phi^\dagger)} = -i \square_2 \phi \quad \pi_{\phi^\dagger}^2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_2} \phi^\dagger)} = -i \square_1 \phi \quad (68)$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^2 x \left[\sum_{i=1}^2 \pi_\phi^i \partial_{\tau_i} \phi + \pi_{\phi^\dagger}^i \partial_{\tau_i} \phi^\dagger - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^2 x \left[\phi^\dagger \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi - \phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi \right] + \text{c.c} \end{aligned} \quad (69)$$

L'intégration sur x donne $(2\pi)^2 \delta^2(k-h)$ et $(2\pi)^2 \delta^2(k+h)$, l'hamiltonien classique H devient dans l'espace de Fourier, et pour des champs solutions des équations du mouvement (on-shell)

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int d^2 k \, k_1^2 k_2^2 \left[a(k) a^\dagger(k) + a^\dagger(k) a(k) \right] \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2} \int d^2 k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) \end{aligned} \quad (70)$$

On voit ici que H est indépendant des temps τ_i , mais, comme nous le verrons plus loin, ceci n'est valable que dans le secteur des solutions particulières de la théorie qui vérifient les deux équations du mouvement simultanément.

³De Donder ne considère pas une théorie multi-temps, mais il traite chaque coordonnées d'espace-temps de manière égalitaire et définit donc un moment conjugué à chacune des variables.

4.2 La quantification

Une fois qu'on a écrit la théorie dans le formalisme hamiltonien, on peut procéder à sa quantification canonique. J'ai d'abord attaqué le problème d'une façon naïve, sans me préoccuper vraiment du nombre de degrés de liberté de la théorie. Je rencontre alors bien sûr des difficultés, mais il est intéressant de faire la version naïve pour voir exactement où sont localisés les problèmes. Les champs solutions de la théorie et leurs moments se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}\phi(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k a(k) e_k \\ \phi^\dagger(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k a^\dagger(k) e_k^* \\ \pi_\phi^i(x, \tau) &= \frac{-i}{(2\pi)^2} \int d^2k k_i^2 a^\dagger(k) e_k^* \\ \pi_{\phi^\dagger}^i(x, \tau) &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^2k k_i^2 a(k) e_k\end{aligned}\tag{71}$$

On peut facilement inverser ces équations

$$a(k) = \int d^2x \phi(x, \tau) e_k^* = \frac{-i}{k_i^2} \int d^2x \pi_{\phi^\dagger}^i(x, \tau) e_k^* \tag{72}$$

$$a^\dagger(k) = \int d^2x \phi^\dagger(x, \tau) e_k = \frac{i}{k_i^2} \int d^2x \pi_\phi^i(x, \tau) e_k \tag{73}$$

La nature fermionique ou bosonique des particules va devenir claire par la suite. Pour le moment on note de façon générique les relations de commutations et d'anti-commutations par $\{, \}$. On promeut donc toutes les fonctions de la théorie classique en des opérateurs, et on impose les relations suivantes à temps égaux

$$\left\{ \phi(x, \tau), \pi_\phi^i(y, \tau) \right\} = \left\{ \phi^\dagger(x, \tau), \pi_{\phi^\dagger}^i(y, \tau) \right\} = i \delta^2(x - y) \tag{74}$$

Ces relations impliquent

$$\left\{ a(k), a^\dagger(h) \right\} = \frac{-(2\pi)^2}{h_1^2} \delta^2(k - h) = \frac{-(2\pi)^2}{h_2^2} \delta^2(k - h) \tag{75}$$

Bien évidemment ces équations sont inconsistantes. La raison est claire : on a un champ et deux moments conjugués, soit un espace des phases de dimensions 3 (en effet on a une dimension 6 car le champ est complexe). Un unique couple d'opérateurs création / annihilation n'est donc pas suffisant pour représenter les degrés de liberté de la théorie (un seul couple est suffisant pour un espace des phases de dimension 2 et non 3). L'origine de cette difficulté est dans la définition même de nos crochets de Poisson, comme nous allons le voir dans une prochaine partie.

D'un autre côté, il est facile de voir que n'importe quel choix de la définition des moments donnera toujours, à une constante multiplicative près, le même hamiltonien classique (on-shell). C'est pour cette raison que dans la suite de cette partie je vais définir les moments suivants

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi)} = -\phi^\dagger \quad \pi_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger)} = -\phi \tag{76}$$

Comme à chaque champ correspond un seul moment, on pourra procéder à la quantification de la manière usuelle. Il est très important de remarquer que cette théorie est fautive puisqu'elle n'a pas le bon nombre de degrés de liberté. Cependant on pourra quand même en extraire des informations très importantes, notamment la nature fermionique des particules de la théorie. Plus sera dit sur une bonne procédure de quantification qui respecte le bon nombre de degrés de liberté de la théorie

classique plus bas. Pour le moment, procédons donc avec les définitions des moments données plus haut. L'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= \int d^2x \left[\pi_\phi \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi + \pi_{\phi^\dagger} \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger - \mathcal{L} \right] \\ &= - \int d^2x \left[\phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i \phi^\dagger \square_1 \partial_{\tau_2} \phi + i \phi^\dagger \square_2 \partial_{\tau_1} \phi \right] + \text{c.c} \end{aligned} \quad (77)$$

Dans l'espace de Fourier, l'hamiltonien classique devient

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int d^2k \, k_1^2 k_2^2 \left[a(k) a^\dagger(k) + a^\dagger(k) a(k) \right] \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2} \int d^2k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) \end{aligned} \quad (78)$$

On rappelle que le champ solution de la théorie se met sous la forme

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, a(k) e_k = -\pi_{\phi^\dagger}(x, \tau) \quad (79)$$

$$\phi^\dagger(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, a^\dagger(k) e_k^* = -\pi_\phi(x, \tau) \quad (80)$$

En inversant ces équations on obtient

$$\begin{aligned} a(k) &= \int d^2x \, \phi(x, \tau) e_k^* = - \int d^2x \, \pi_{\phi^\dagger}(x, \tau) e_k^* \\ a^\dagger(k) &= \int d^2x \, \phi^\dagger(x, \tau) e_k = - \int d^2x \, \pi_\phi(x, \tau) e_k \end{aligned} \quad (81)$$

On promeut donc toutes les fonctions de la théorie classique en des opérateurs, et on impose les relations suivantes à temps égaux (on déterminera par la suite si ce sont des relations de commutation ou d'anticommutation)

$$\left\{ \phi(x, \tau), \pi_\phi(y, \tau) \right\} = \left\{ \phi^\dagger(x, \tau), \pi_{\phi^\dagger}(y, \tau) \right\} = i \delta^2(x - y) \quad (82)$$

Ces relations impliquent

$$\left\{ a(k), a^\dagger(h) \right\} = -(2\pi)^2 \delta^2(k - h) \quad (83)$$

L'hamiltonien écrit plus haut n'est pas un opérateur défini positif : il contient une contribution positive et une contribution négative en fonction du signe de $k_1^2 k_2^2$. Notons donc

$$\mathcal{D}_+ = \left\{ (k_1, k_2), k_1^2 k_2^2 > 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_- = \left\{ (k_1, k_2), k_1^2 k_2^2 < 0 \right\} \quad (84)$$

Si on veut se débarrasser de ce problème, on doit supposer que les particules obéissent à une statistique de Fermi-Dirac : on définit alors $b(k) = a^\dagger(k)$ sur \mathcal{D}_- , et on interprète $b(k)$ et non $a(k)$ comme l'opérateur annihilation sur ce domaine. La décomposition du champ devient alors

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathcal{D}_+} d^2k \, a(k) e_k + \int_{\mathcal{D}_-} d^2k \, b^\dagger(k) e_k \right] \quad (85)$$

L'hamiltonien de la théorie s'écrit alors

$$\begin{aligned} H &= \frac{4}{(2\pi)^2} \int d^2k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathcal{D}_+} d^2k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) + \int_{\mathcal{D}_-} d^2k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) \right] \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathcal{D}_+} d^2k \, k_1^2 k_2^2 \, a^\dagger(k) a(k) + \int_{\mathcal{D}_-} d^2k \, |k_1^2 k_2^2| \, b^\dagger(k) b(k) \right] \end{aligned} \quad (86)$$

Remarquons ici que le théorème spin-statistique, qui relie la nature fermionique ou bosonique des particules à leur spin dans les théories de champs usuelles n'est pas applicable ici, puisque le champ ϕ est un champ scalaire, donc de spin 0. Il faudrait donc le quantifier avec une statistique bosonique si on veut suivre le théorème, mais on a vu que ceci est inconsistant. Je ne connais du théorème spin-statistique que son énoncé, je suis donc incapable d'aller plus loin pour comprendre pourquoi il n'est pas applicable aux théories de champs paramétrisées.

Les relations d'anticommutations entre les opérateurs a et a^\dagger et le fait que l'hamiltonien est diagonal dans cette représentation permettent alors de les interpréter comme des opérateurs création / annihilation. L'espace des solutions a donc une structure d'espace de Fock où le vide $|0\rangle$ est défini par

$$a(k)|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad b(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k \quad (87)$$

Et les états à plusieurs particules sont donnés par

$$\prod_{i=1}^M a^\dagger(k^i) \prod_{j=1}^N b^\dagger(k^j) |0\rangle \quad (88)$$

4.3 Implémentation de la symétrie de la GFT

Dans la GFT, le champ ϕ doit obéir à la symétrie suivante

$$\phi(x_1, x_2, \tau) = \phi(x_1 + a, x_2 + a, \tau) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (89)$$

Comme les translations sont représentées dans l'espace de Fourier par une simple multiplication, on va prendre la transformée de Fourier de l'équation précédente

$$\phi(x_1, x_2, \tau) = \int d^2k \tilde{\phi}(k_1, k_2, \tau) e^{ikx} \quad (90)$$

La contrainte devient donc

$$\tilde{\phi}(k, \tau) e^{i(k_1+k_2)a} = \tilde{\phi}(k, \tau) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (91)$$

Ainsi $k_1 + k_2 = 0$, ce qui implique que $\tilde{\phi}(k, \tau)$ est une fonction d'une seule variable k au lieu de 2. La conséquence sur le champ est

$$\phi(x_1, x_2, \tau) = \int dk \tilde{\phi}(k_1, -k_1, \tau) e^{ik_1(x_1-x_2)} \quad (92)$$

Ceci implique l'existence d'une fonction χ tel que

$$\phi(x_1, x_2, \tau) = \chi(x_1 - x_2, \tau) \quad (93)$$

Bien sûr tout champ de cette forme vérifie clairement la symétrie. Un moyen simple d'imposer cette symétrie et de définir le projecteur P par :

$$\psi(x_1, x_2, \tau) = P[\phi](x_1, x_2) = \int da \phi(x_1 + a, x_2 + a, \tau) \quad (94)$$

Il est alors évident que ψ vérifie la symétrie.

Comme le projecteur, ainsi que les équations du mouvement sont linéaires, ψ vérifie les équations du mouvement si ϕ les vérifie

$$D\phi = 0 \Rightarrow P[D\phi] = DP[\phi] = 0 \Rightarrow D\psi = 0 \quad (95)$$

On a également

$$P[\pi_\phi] = \pi_\psi \quad (96)$$

ψ est le champ qui possède une signification physique, c'est sur lui et son moment conjugués qu'on impose donc les relations d'anti-commutations à temps égaux

$$\left\{ \psi(x, \tau), \pi_\psi(y, \tau) \right\} = \left\{ \psi^\dagger(x, \tau), \pi_{\psi^\dagger}(y, \tau) \right\} = \delta^4(x - y) \quad (97)$$

Il est facile de relier a_ψ et a_ϕ :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \int da \, d^2x \phi(x_1 + a, x_2 + a) e^{ikx} \\ &= \tilde{\phi} \int da \, e^{i(k_1 + k_2)a} \end{aligned} \quad (98)$$

Ce qui implique $a_\psi = \delta(k_1 + k_2)a_\phi$. Comme ψ vérifie les équations du mouvement, son hamiltonien est identique à celui de ϕ . Même si l'hamiltonien est quadratique et non linéaire en les champs, il est toujours simple d'imposer la contrainte

$$\begin{aligned} H = H_\psi &= \frac{4}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathcal{D}_+} d^2k \, k_1^2 k_2^2 a_\psi^\dagger(k) a_\psi(k) + \int_{\mathcal{D}_-} d^2k \, |k_1^2 k_2^2| b_\psi^\dagger(k) b_\psi(k) \right] \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathcal{D}_+} d^2k \, \delta(k_1 + k_2) k_1^2 k_2^2 a_\phi^\dagger(k) a_\phi(k) + \int_{\mathcal{D}_-} d^2k \, \delta(k_1 + k_2) |k_1^2 k_2^2| b_\phi^\dagger(k) b_\phi(k) \right] \end{aligned} \quad (99)$$

Finalement, voila la prescription pour construire l'espace de Fock de la théorie avec contrainte : on calcule les opérateurs création / annihilation de la théorie non contrainte a_ϕ and a_ϕ^\dagger , ensuite on construit le vrai espace de Fock où le vide $|0\rangle$ est défini par

$$\delta(k_1 + k_2) a(k) |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \delta(k_1 + k_2) b(k) |0\rangle = 0 \quad \forall k \quad (100)$$

Et les états à plusieurs particules sont donnés par

$$\prod_{i=1}^M \delta(k_1^i + k_2^i) a^\dagger(k^i) \prod_{j=1}^N \delta(k_1^j + k_2^j) b^\dagger(k^j) |0\rangle \quad (101)$$

4.4 L'espace des solutions le plus générale

Dans les calculs précédents on n'a étudié qu'un secteur particulier de la théorie où plusieurs équations sont satisfaites simultanément (secteur fortement contraint). Ici on va faire les calculs dans le cas général. On considère le champ scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \quad (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, \tau_1, x_2, \tau_2) &\longmapsto \phi(x_1, \tau_1, x_2, \tau_2) \end{aligned}$$

On définit alors le lagrangien (réel) de la GGFT, où $\square_i = \partial_{x_i}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \phi^\dagger \left[\prod_{i=1}^2 (\square_i + i\partial_{\tau_i}) \right] \phi + \text{c.c} \\ &= \phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i\phi^\dagger \square_1 \partial_{\tau_2} \phi + i\phi^\dagger \square_2 \partial_{\tau_1} \phi + \phi \square_1 \square_2 \phi^\dagger - i\phi \square_1 \partial_{\tau_2} \phi^\dagger - i\phi \square_2 \partial_{\tau_1} \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi - \phi \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger \end{aligned} \quad (102)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ ϕ est donc

$$\left[\prod_{i=1}^2 (\square_i + i\partial_{\tau_i}) \right] \phi = 0 \quad (103)$$

Comme on a affaire à des équations linéaires, il est naturel de passer à l'espace de Fourier

$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, d^2\alpha \, A(k, \alpha) e^{-i(kx + \alpha\tau)} \quad (104)$$

$$\widetilde{\partial_{x_i} \phi} = -ik_i \widetilde{\phi} \quad \widetilde{\partial_{\tau_i} \phi} = -i\alpha_i \widetilde{\phi} \quad (105)$$

Ainsi l'équation du mouvement dans l'espace de Fourier devient

$$(\alpha_1 - k_1^2)(\alpha_2 - k_2^2)\widetilde{\phi} = 0 \quad (106)$$

Le champ ϕ le plus général qui obéit explicitement à l'équation du mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(x, \tau) &= \int \frac{d^2 k d^2 \alpha}{(2\pi)^2} \delta(\alpha_1 - k_1^2) A(k, \alpha) e^{-i(kx + \alpha\tau)} + \int \frac{d^2 k d^2 \alpha}{(2\pi)^2} \delta(\alpha_2 - k_2^2) A(k, \alpha) e^{-i(kx + \alpha\tau)} \quad (107) \\ &= \int \frac{d^2 k d\alpha}{(2\pi)^2} \left[A(k, k_1^2, \alpha) e^{-i(kx + k_1^2 \tau_1 + \alpha\tau_2)} + A(k, \alpha, k_2^2) e^{-i(kx + \alpha\tau_1 + k_2^2 \tau_2)} \right] \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\left(\int d\alpha A(k, k_1^2, \alpha) e^{-i\alpha\tau_2} \right) e^{-i(kx + k_1^2 \tau_1)} + \left(\int d\alpha A(k, \alpha, k_2^2) e^{-i\alpha\tau_1} \right) e^{-i(kx + k_2^2 \tau_2)} \right] \end{aligned}$$

Finalement

$$\phi(x, \tau) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} [a_1(k, \tau) e_{k, \tau_1} + a_2(k, \tau) e_{k, \tau_2}] \quad (108)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1(k, \tau) &= \int d\alpha A(k, k_1^2, \alpha) e^{-i\alpha\tau_2} \quad \text{et} \quad e_{k, \tau_1} = e^{-i(kx + k_1^2 \tau_1)} \quad (109) \\ a_2(k, \tau) &= \int d\alpha A(k, \alpha, k_2^2) e^{-i\alpha\tau_1} \quad \text{et} \quad e_{k, \tau_2} = e^{-i(kx + k_2^2 \tau_2)} \end{aligned}$$

Le choix naturel des moments, à la De Donder, pose les mêmes problèmes que la section précédente. Ceci est un fait intéressant car pendant un moment j'ai cru que la solution au problème du nombre de degrés de liberté est d'ajouter à la main des opérateurs créations / annihilations en plus pour avoir le bon nombre de degrés de libertés. En effet il est facile de voir qu'imposer les relations suivante

$$\{a_i(k, \tau), a_i^\dagger(h, \tau)\} = \delta^2(k - h) \quad (110)$$

conduit aux relations non cohérentes suivantes entre les champs et leurs moments

$$\begin{aligned} \{\phi(x, \tau), \pi_1(y, \tau)\} &\propto \delta(x_2 - y_2) \int dk k e^{-ik(x_1 - y_1)} \quad (111) \\ \{\phi(x, \tau), \pi_2(y, \tau)\} &\propto \delta(x_1 - y_1) \int dk k e^{-ik(x_2 - y_2)} \end{aligned}$$

On prend alors comme dans la section précédente les moments suivants

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi)} = -\phi^\dagger \quad \pi_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger)} = -\phi \quad (112)$$

On procède à la quantification, sachant que les particules sont des fermions. Il est facile de vérifier la cohérence des relations d'anticommutations des champs une fois les relations d'anticommutations entre les opérateurs imposées. On impose donc les relations à temps égaux

$$\{a_i(k, \tau), a_i^\dagger(h, \tau)\} = \frac{i}{2(2\pi)^2} \delta^2(k - h) \quad (113)$$

On obtient

$$\{\phi(x, \tau), \pi(y, \tau)\} = \{\phi^\dagger(x, \tau), \pi_{\phi^\dagger}(y, \tau)\} = i\delta^2(x - y) \quad (114)$$

En suivant le raisonnement de la section précédente, on note

$$\mathcal{D}_+ = \{(k_1, k_2), k_1^2 k_2^2 > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_- = \{(k_1, k_2), k_1^2 k_2^2 < 0\} \quad (115)$$

Et on redéfinit les opérateurs. La décomposition du champ devient

$$\phi(x, \tau) = \int_{\mathcal{D}_+} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[a_1(k, \tau) e_{k, \tau_1} + a_2(k, \tau) e_{k, \tau_2} \right] + \int_{\mathcal{D}_-} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[b_1(k, \tau) e_{k, \tau_1} + b_2(k, \tau) e_{k, \tau_2} \right] \quad (116)$$

L'hamiltonien de la théorie s'écrit toujours

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \int d^2x \left[\pi_\phi \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi + \pi_{\phi^\dagger} \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} \phi^\dagger - \mathcal{L} \right] \\ &= - \int d^2x \left[\phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i \phi^\dagger \square_1 \partial_{\tau_2} \phi + i \phi^\dagger \square_2 \partial_{\tau_1} \phi \right] + \text{c.c} \end{aligned} \quad (117)$$

On peut développer l'expression du hamiltonien, mais il y aura des termes du type $\partial_{\tau_i} a_1(k, \tau)$. Le point très important est que l'hamiltonien dépend explicitement des temps τ_i . Les deux conséquences les plus importantes de ceci sont

- La diagonalisation (instantanée) de $H(\tau)$ ne donne plus les états solutions de la théorie. La section suivante est consacrée à une méthode (qui remplace la diagonalisation de H) pour résoudre exactement et algébriquement la théorie.
- L'opérateur d'évolution n'est plus donné par $U = e^{iHt}$ (ou de façon équivalente, la fonction de partition n'est plus donnée par $Z = e^{-\beta H}$).

Cela m'a beaucoup gêné quand j'ai trouvé que l'hamiltonien de la théorie *libre* de la GGFT dépend du temps. Écrire des opérateurs création / annihilation qui dépendent du temps pour un système complètement isolé me semblait très bizarre et veut dire que la théorie libre de la GGFT est loin d'être triviale. Un peu plus tard je suis tombé sur l'article [Kim] qui traite des champs quantique hors d'équilibre en cosmologie. En effet écrire une théorie quantique des champs dans un contexte cosmologique peut nécessiter de prendre en compte l'inflation. Dans ce cas, la métrique dépend du temps et les champs sont hors d'équilibre. Ceci ressemble donc beaucoup à la GGFT. J'ai pu alors lire ceci dans cet article

« It was pointed out by F. C. Khanna and G. Vitiello that the new vacuum makes sense in spite of the time-dépendence and may have a relation with the one parameter-dépendent vacuum in the thermal field theory that leads to the infinitely many unitarily inéquivalent Fock space. This point suggests strongly that our functional Schrödinger-picture approach may have a close connection with the thermal field theory. »

Il est donc fort possible que la GGFT aie un lien avec la *Thermal Field Theory*, qui est la théorie quantique des champs à température non nulle.

4.4.1 Résoudre exactement une théorie dépendant du temps

Comme j'ai déjà dit, la diagonalisation d'un hamiltonien qui dépend du temps ne fournit pas les états solutions de la théorie. Ceci est facile à voir sur l'équation de Schrödinger dépendant du temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \hat{H}(t) |\psi, t\rangle \quad (118)$$

Considérons un vecteur propre (instantané) $|\psi, t\rangle$ de $\hat{H}(t)$, c'est à dire que $\hat{H}(t) |\psi, t\rangle = \lambda(t) |\psi, t\rangle$. La forme spécifique de $H(t)$ et les conditions aux limites déterminent de façon unique les $\lambda(t)$ et les $|\psi, t\rangle$ convenables. Ils sont donc donnés indépendamment de l'équation de Schrödinger. Si en plus $|\psi, t\rangle$ vérifie l'équation de Schrödinger, alors

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \hat{H}(t) |\psi, t\rangle = \lambda(t) |\psi, t\rangle \quad (119)$$

Ceci implique

$$|\psi, t\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right] |\psi, 0\rangle = U(t) |\psi, 0\rangle \quad (120)$$

Or a priori un vecteur qui diagonalise $H(t)$ n'a aucune raison de pouvoir se mettre sous cette forme. Seul un ensemble très particulier des vecteurs propres de $H(t)$ sont donc aussi solutions de l'équation de Schrödinger. En effet en utilisant la forme des solutions de l'équation de Schrödinger et si H ne contient pas de dérivation temporelle, on a

$$U(t)H(t)|\psi, 0\rangle = \widehat{H}(t)|\psi, t\rangle = \lambda(t)|\psi, t\rangle = \lambda(t)U(t)|\psi, 0\rangle \quad (121)$$

et donc l'hamiltonien a la forme très spéciale suivante

$$H(t) = \lambda(t) \mathbb{I} \quad (122)$$

Remarquons que si H est indépendant du temps, alors λ l'est également : en appliquant \widehat{H} à l'égalité (120)

$$\widehat{H}(t)|\psi, t\rangle = U(t)\widehat{H}(t)|\psi, 0\rangle \quad (123)$$

Si on suppose que l'hamiltonien est indépendant du temps, on a en particulier $\widehat{H}(t) = \widehat{H}(0)$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \lambda(t)|\psi, t\rangle &= \lambda(0)U(t)|\psi, 0\rangle \\ \lambda(t)U(t)|\psi, 0\rangle &= \lambda(0)U(t)|\psi, 0\rangle \end{aligned} \quad (124)$$

Donc $\lambda(t) = \lambda(0)$ pour tout t et λ est une constante indépendante du temps.

Le fait que la diagonalisation de l'hamiltonien ne fournisse plus les solutions stationnaires de la théorie est très gênant. En effet nos théories s'expriment par des équations aux dérivées partielles. Résoudre la théorie, c'est donc résoudre ces équations, ce qui est un travail « analytique ». Dans le cas où diagonaliser le hamiltonien donne aussi les solutions, on doit être très content. En effet diagonaliser est une opération algébrique, beaucoup plus pratique et économique. Bien évidemment s'il faut expliciter la fonction d'onde on aura à résoudre en fin de compte les équations de façon analytique, mais en général on n'en a pas besoin. Cette résolution algébrique permet de mettre une structure très simple sur l'espace des solutions stationnaires, la structure de l'espace de Fock. Avec un hamiltonien dépendant du temps, je ne savais pas comment construire l'espace de Fock de la GFT dans le cas le plus général, c'est à dire mettre une structure simple sur cette espace qui facilite son interprétation en terme de particules. En cherchant dans la littérature, j'ai trouvé des articles qui fournissent la solution à ce problème : il est possible de résoudre une théorie dont l'hamiltonien dépend du temps de façon algébrique et exacte : il suffit de trouver un invariant (une constante du mouvement). Dans l'annexe 7 je présente les détails de la méthode trouvée dans [Lewis].

Cette méthode est appliquée à un oscillateur harmonique dépendant du temps. Mais tous les résultats qu'on obtiendra vont nous aider directement en théorie des champs, puisqu'une théorie des champs libre n'est autre qu'une collection infinie d'oscillateurs harmoniques.

Je n'ai pas encore eu le temps d'adapter cela à la GFT et de construire l'espace de Fock de la GFT dépendant du temps. J'y travaille actuellement.

4.5 La GGFT a temps unique : $\tau_1 = \tau_2 = \tau$

Il peut être intéressant d'étudier le cas particulier où l'on égalise, pour une raison ou une autre, les différents temps. Dans ce cas la GGFT n'est plus une théorie multi-temps. Cependant, il est à remarquer que le lagrangien contient alors des dérivées temporelles d'ordres supérieurs. L'étude de telles théories est un sujet classique de la mécanique. En effet les théories d'ordre supérieures présentent des problèmes avec la positivité de l'énergie et/ou la causalité. Parfois, l'un des moyens d'éviter ce genre de problème est d'ajouter des dérivées à tout ordre. On obtient alors des théories non locales. Voilà la raison si j'ai bien compris : si on admet que les fonctions de la théorie sont développables en série entière, la donnée de toutes les dérivées en un point permet de calculer ces fonctions partout. Mais ceci reste vague dans ma tête. En tout cas, la GFT à temps unique est une théorie d'ordre supérieur. On veut la quantifier canoniquement. Il suffit d'essayer de définir les moments conjugués

pour se rendre compte que ce n'est pas une tâche tout à fait trivial : faut-il définir uniquement le moment usuel $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}}$? Ce choix usuel oublie complètement les contributions de termes d'ordres supérieurs tel que $\partial_\tau^2, \partial_\tau^3, \dots$. Après un peu de recherche dans la littérature, j'ai trouvé dans [Eliezer] qu'Ostrogradski a déjà construit l'analyse hamiltonienne des théories d'ordres supérieurs. Je présente cette construction et je l'applique à la GGFT à temps unique dans l'annexe 9.

4.6 Le bon nombre de degrés de liberté et la mécanique de Nambu

Dans le cadre de la théorie classique, on a vu comment construire, en suivant De Donder, les bons moments conjugués. On connaît ainsi le bon nombre de degrés de libertés de la théorie classique. Cependant, lors de la quantification on rencontre des difficultés due à la différence du nombre de champs et de moments : On a un champ, deux moments, et imposer deux relations d'anticommutation entre le champ et chacun des moments conduit à une incohérence. Bien sur le problème est déjà présent dans la théorie classique : on n'a pas de structure de Poisson satisfaisante. En effectuant une recherche, j'ai découvert qu'en 1973, Nambu a construit dans [Nambu] une mécanique généralisée, qui correspond exactement à ce qu'il me fallait. L'idée de base est de considérer un système décrit par un n-uplet de variables canoniques, au lieu du cas usuel d'un (ou de plusieurs) couples de variables conjugués. Au lieu d'imposer des relations entre (ϕ, π^1) et (ϕ, π^2) , on impose une seule relation entre le triplet (ϕ, π^1, π^2) ce qui est beaucoup plus symétrique et convaincant. L'idée est d'introduire une généralisation du crochet de Poisson, le crochet de Nambu $\{ \phi, \pi^1, \pi^2 \}$. Par exemple sur un espace des phases de dimension 3 de coordonnées x, y et z , le crochet de Nambu entre trois observables est défini par

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)} \quad (125)$$

où la partie droite de l'équation dénote le jacobien de l'application $f = (f_1, f_2, f_3)$. Remarquons que cette définition coïncide avec le crochet de Poisson dans le cas usuel d'un espace des phases de dimension 2 :

$$\{f_1, f_2\}_{\text{Nambu}} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \{f_1, f_2\}_{\text{Poisson}} \quad (126)$$

L'une des propriétés les plus importantes des crochets de Poisson est qu'ils vérifient l'identité de Jacobi. En effet ceci donne une structure d'algèbre de Lie à l'espace des phases.

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} = 0 \quad (127)$$

L'un des atouts majeurs des crochets de Nambu est qu'ils vérifient une identité similaire

$$\{f_1, f_2, \{f_3, f_4, f_5\}\} = \{\{f_1, f_2, f_3\}, f_4, f_5\} + \{f_3, \{f_1, f_2, f_4\}, f_5\} + \{f_3, f_4, \{f_1, f_2, f_5\}\} \quad (128)$$

Dans le cas usuel, les crochets de Poisson permettent d'écrire les équations du mouvement de façon très simple en utilisant l'hamiltonien.

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} \quad (129)$$

Par contre pour générer la dynamique de la mécanique généralisée, le formalisme de Nambu nécessite plusieurs fonctions (plusieurs hamiltoniens).

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, H_2, f\} \quad (130)$$

Je n'ai pas encore eu le temps de comprendre en détail la construction de ces fonctions H_1 et H_2 . Pour cela j'étudie actuellement l'article original [Nambu]. J'ai également trouvé dans l'article [Bayen] que le formalisme de Nambu peut être mis sous une forme utilisant un seul hamiltonien. Un autre problème est que quantifier les crochets de Nambu, c'est à dire généraliser le principe de correspondance qu'on applique aux crochets de Poisson, est un problème difficile. Voir pour cela [Awata]. Certains auteurs ont développé d'autres méthodes de quantification des théories multi-temps, basées extensivement sur de la géométrie différentielle comme dans [Kan] et [Hippel]. Je suis également en train d'étudier laquelle de ces propositions est la mieux adaptée à la quantification de la GGFT.

5 Quantification canonique de la GGFT sur $(\mathbb{G} \times \mathbb{R})^n$

Une fois la bonne procédure de la quantification et la bonne construction de l'espace de Fock obtenu dans le cas des champs vivant sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$, l'extension au cas des champs sur $(\mathbb{G} \times \mathbb{R})^n$ ne pose aucun problème de principe. En effet, une notion de transformée de Fourier sur \mathbb{G} existe en général : le théorème de Peter-Weyl permet d'étendre l'analyse harmonique aux groupes compacts et à certains groupes non compacts (en particulier le groupe de Lorentz). Une référence est [Ruhl]. Mon maître de stage s'occupera probablement de cette partie du travail.

6 Investigations naturelles découlant de ce travail : la limite continue et l'émergence de la relativité générale

6.1 L'espace temps, un superfluide fermionique ?

La question la plus importante à propos des différentes théories de la gravitation quantique non perturbatives reste ouverte : est-ce que la limite semi-classique est consistante avec la relativité générale et le modèle standard ? En effet on part de la relativité générale, et afin de quantifier, on tronque le nombre infini des degrés de liberté du champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$ à un nombre fini. La quantification s'en trouve largement simplifiée. Cependant, une fois la théorie quantique en main, il est crucial de vérifier la réciproque, c'est à dire que dans une certaine limite continue on retombe sur la relativité générale. La définition de cette limite continue et comment la prendre est un sujet très complexe. Ayant obtenu l'hamiltonien de la GGFT dans ce projet, on peut penser étudier la limite continue de la théorie dans l'esprit de la physique statistique : ceci revient à étudier une certaine limite thermodynamique d'un gaz de fermions libre. La fonction de partition de la théorie du secteur spéciale de la théorie où H ne dépend pas du temps s'écrit par exemple

$$Z = e^{-\frac{\hat{H}}{k_B T}} \quad (131)$$

Bien sur il faut arriver à donner un sens au paramètre T qui est la température dans la physique statistique.

Dans l'esprit de mon maître de stage, l'espace temps classique serait une sorte de condensat de Bose-Einstein issu de la condensation des particules de la GGFT : les atomes d'espace temps. Mais depuis qu'on a découvert la nature fermionique de ces particules, cette idée n'est plus valable. Une autre possibilité pour la limite semi-classique vient du travail de Volovik publié dans [Vol]. En gros, il étudie un gaz de fermions libres superfluide et dans certaines limites il fait émerger l'action de la relativité générale ! Je n'ai aucune idée du comment mais il est sûrement intéressant d'étudier les travaux de Volovik de plus près.

Une dernière remarque : ici je n'ai construit que l'hamiltonien de la théorie sans interactions. On pourrait alors penser que l'étude d'une limite thermodynamique d'une théorie libre est triviale et sans intérêt. Mais ceci est tout simplement faux. En effet la théorie des bosons libres par exemple contient déjà un phénomène hautement non trivial : la condensation de Bose-Einstein. Bien sûr on peut essayer d'ajouter des interactions pour rendre le modèle plus réaliste (un piège harmonique par exemple), traiter les interactions par l'intermédiaire d'un champ moyen... , mais une chose est sûre, la physique statistique d'une théorie libre n'est pas sans intérêt puisqu'elle peut contenir des changements de phases. Dans le cas de la GGFT s'ajoute aussi le fait que l'hamiltonien libre contient une dépendance temporelle, ce qui rend la théorie libre encore moins triviale.

6.2 Autres idées

Je vais finir en listant deux idées qui pourraient se révéler intéressantes lors d'études futures de la GGFT.

- L'étude des états cohérents peut se révéler précieuse pour l'étude de la limite semi-classique. La structure de l'espace de Fock que nous avons ici pourrait simplifier la construction de ces états.
- Comme j'ai déjà expliqué, la dépendance en temps de l'hamiltonien libre de la GGFT (comprise comme dépendance en température) suggère un lien entre la GGFT et la *Thermal Field Theory*.

7 Conclusion

Lors de mes calculs, je me suis trouvé devant un système classique peu habituel à quantifier de manière canonique. Le problème majeure est la présence de plusieurs paramètres temporels qui nécessitent la définition de plusieurs moments conjugués à un seul champ scalaire. Pour contourner ce problème, j'ai commencé par définir un seul moment « à la main ». Cet unique moment m'a permis d'aboutir à des résultats intéressants, notamment :

1. La GGFT possède une symétrie dont j'ai étudié les conséquences sur l'espace de Fock de la théorie.
2. La théorie libre de la GGFT possède une dépendance temporelle. La construction de l'espace de Fock d'une telle théorie est non triviale mais j'ai trouvé dans la littérature que ce problème a déjà été traité, même si c'est dans une situation beaucoup plus simple que la nôtre. Cette dépendance temporelle est peut-être également à l'origine d'un lien entre la GGFT et la *Thermal Field Theory*.
3. J'ai également étudié la théorie dans le cas où on décide d'égaliser tous les temps. Dans ce cas la théorie ne présente plus les difficultés des théories multi-temps, mais elle devient une théorie d'ordre supérieur. J'ai trouvé dans la littérature comment construire l'analyse hamiltonienne d'une telle théorie.

La quantification de la théorie avec plusieurs moments s'est révélée beaucoup plus difficile. La encore j'ai trouvé plusieurs pistes, mais toutes nécessitent de munir l'espace des phases d'une généralisation de la structure symplectique usuellement mise sur l'espace des phases. Je continue à étudier toutes ces pistes actuellement. En plus, même quand une telle structure satisfaisante est trouvée, la quantification peut rester un problème difficile et surtout ambiguë. C'était très nouveau pour moi de se retrouver dans une situation où il faut donner un sens au mot quantifier. Ceci m'a encore fait réfléchir sur l'origine de la quantification dans le cas « facile » de la mécanique quantique usuelle. C'est là que j'ai découvert le théorème de Stone-Von Neumann que je trouve tout à fait fascinant et qui rend les résultats de bases de la mécanique quantique beaucoup moins « arbitraires ».

Enfin, s'il est facile de soupçonner que la théorie quantique des champs ou la relativité générale contiennent d'énormes richesses, je ne m'attendais pas à ce que ce soit déjà le cas de la mécanique classique et de sa structure symplectique. Ce projet m'a permis de découvrir la gravitation quantique, mais surtout de réfléchir longuement sur le formalisme hamiltonien de la mécanique classique, que j'ai découvert être, à ma grande surprise, hautement non trivial dès qu'on s'éloigne un peu des cas les plus classiques : j'ai été confronté à des théories possédant plusieurs temps, d'autres possédant des dérivées d'ordre supérieur, et même des théories complètement isolées ayant quand même une dépendance temporelle.

Finalement je veux remercier chaleureusement Daniele Oriti mon maître de stage, pour les très nombreuses discussions qui donnent toujours des idées, pour ses très nombreuses explications très pédagogiques sur la théorie des champs, la relativité générale et la gravitation quantique, et enfin pour sa constante bonne humeur. Je tiens également à remercier le DAMTP, un laboratoire où les conditions de travail sont quasi-parfaites.

Références

- [Awata] H. Awata and M. Li, *On the quantization of Nambu brackets*, hep-th/9906248 (1999).
- [Bayen] A. Bayen and M. Flato, *Remarks concerning Nambu's generalized mechanics*, Phys. Rev. 11, N. 10 (1975).
- [Connes] A. Connes, *Non commutative geometry and physics*.
- [De Donder] Th. De Donder, *Théorie invariante du calcul des variations*, Gauthier-Villars, Paris (1935).
- [Eliezer] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, *Nonlocality in string theory*, Nuclear physics B325, 389 (1989).
- [Hippel] M. von Hippel and N. R. Wohlfarth, *Covariant canonical quantization*, hep-th/0509199 (2006).
- [Holster] L. Hostler, *Quantum field theory of particles of indefinite mass. I*, J. Math. Phys., vol 21, No. 9 (1980).
- [Isham] J. Butterfield and C. Isham, *Spacetime and the philosophical challenge of Quantum Gravity*, in *Physics meets philosophy at the Planck scale*, Cambridge university press (2000).
- [Isham 1995] C. Isham, *Quantum Theory, Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press (1995).
- [Kaku] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, (1993).
- [Kan] I. Kanatachikov, *On field theoretic generalizations of a Poisson algebra*, Rep. Math. Phys., vol 40, p.225 (1997).
- [Kim] S. P. Kim, *Nonequilibrium quantum scalar fields in cosmology*, hep-th/ 9511082 (1995).
- [Kim 2003] S. P. Kim, *Invariant operators vs Heisenberg operators for time-dependent generalized oscillators*, quant-ph/ 0303148 (2003).
- [Lewis] H. R. Lewis and W. B. Reisenfeld, *An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field*, J. Math. Phys., vol 10, No. 8 (1969).
- [Linnet] B. Linet, *Notes de cours de relativité générale*
- [Misner] C. Misner, *Feynman quantization of général relativity*, Rev Mod Phys 29, 497 (1957).
- [Nambu] Y. Nambu, *Generalized hamiltonien dynamics*, Phys. Rev. D, vol 7, No. 8, p.2405 (1973).
- [Nakahara] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Douglas F. Brewer (1990).
- [Oriti 2006] D. Oriti, *The group field theory approach to quantum gravity*, gr-qc/0607032 (2006).
- [Oriti] D. Oriti, *Quantum gravity as a quantum field theory of simplicial geometry*, gr-qc/0512103 (2006).
- [Oriti Generalized] D. Oriti, *Generalised group field theories and quantum gravity transition amplitudes*, gr-qc/0512069 (2006).
- [Perez] A. Perez, *Introduction to loop quantum gravity and spin foams*, gr-qc/0409061 (2004).
- [Peskin] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (1996).
- [Rovelli] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge university press (2004).
- [Ruhl] W. Ruhl, *The Lorentz group and harmonic analysis*, Benjamin (1970).

- [Tak] L. Takhtajan, *On foundation of Nambu generalized mechanics*, Comm. Math. Phys., 160, p.295 (1994).
- [Vol] G. Volovik, *The universe in a helium droplet*, Clarendon Press Oxford (2003).
- [Wheeler] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973)
- [Witten] E. Witten, *2 + 1 Dimensional gravity as an exactly soluble system*, Nuclear Physics B311, 46 (1988).

8 Annexes

8.1 Annexe 1 : Propagateur de Schrödinger

Calculons le propagateur, c'est à dire l'amplitude de probabilité de propagation libre ($V = 0$) entre 2 points quelconques d'espace temps. L'opérateur unitaire d'évolution $U(t)$ s'écrit

$$U(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{\hat{P}^2 t/(2m)} \quad (132)$$

L'amplitude de probabilité de transition entre le point $x = (\vec{x}, t = 0)$ et le point $y = (\vec{y}, t)$ s'écrit alors

$$\mathcal{K}(x \rightarrow y) = \langle \vec{y}, t | U(t) | \vec{x}, 0 \rangle \quad (133)$$

On va continuer le calcul à une dimension d'espace. En insérant une relation de fermeture $\int dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}$ où les états $\{|p\rangle\}$ diagonalisent l'opérateur \hat{P} , on obtient

$$\mathcal{K}(x \rightarrow y) = \int dp \langle y | e^{\frac{\hat{P}^2 t}{2m}} | p \rangle \langle p | x \rangle \quad (134)$$

En prenant la définition de la transformée de Fourier telle que

$$\psi(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p) \quad (135)$$

Et en décomposant le vecteur $|\psi\rangle$ sur la base $\{|p\rangle\}$ on obtient

$$\langle x | \psi \rangle = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | \psi \rangle \quad (136)$$

On en tire que

$$\langle x | p \rangle = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (137)$$

Le propagateur s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x \rightarrow y) &= \int dp \langle y | p \rangle \langle p | x \rangle \exp \left[\frac{p^2 t}{2m} \right] \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{p^2 t}{2m} + ip(y-x)/\hbar \right] \end{aligned} \quad (138)$$

Après avoir mis l'argument de l'exponentielle sous la forme d'un carré parfait, et en effectuant l'intégrale gaussienne résultante on trouve

$$\mathcal{K}(x \rightarrow y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar t} (y-x)^2 \right] \quad (139)$$

8.2 Annexe 2 : Propagateur de Klein-Gordon avec énergies positives

On a vu que l'équation la plus simple qu'on peut écrire pour une particule (de spin 0) relativiste quantique est l'équation de Klein-Gordon. Cette équation donne des niveaux d'énergie aussi bien positifs que négatifs $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$. On peut dans un premier temps essayer de se restreindre aux énergies positives. Cependant on va voir que se restreindre aux énergies positives rend la théorie non causal, exactement comme c'était le cas avec l'équation de Schrödinger. Dans cet annexe on va calculer l'amplitude d'une particule régie par l'équation de Klein-Gordon (avec énergies uniquement positives) de se propager d'un point $x = (t = 0, \vec{x})$ à un point $y = (t, \vec{y})$: le propagateur. Les calculs, qu'on va faire en dimension un, ressemblent à ceux de l'annexe 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x \rightarrow y) &= \langle \vec{y}, t | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x}, 0 \rangle \\ &= \int \frac{dp}{(2\pi)} \exp \left[i \left(p(y-x) - t \sqrt{p^2 + m^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (140)$$

On ne s'intéresse qu'aux valeurs très en dehors du cône de lumière : $(y-x)^2 \gg t^2$. Il est alors possible de voir [Peskin] que le comportement asymptotique du propagateur pour $x^2 \gg t^2$ est en

$$\mathcal{K}(x \rightarrow y) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}} \quad (141)$$

Le propagateur ne s'annulant pas en dehors du cône de lumière, la théorie est donc non causale.

8.3 Annexe 3 : Causalité en théorie quantique des champs

Pour prouver qu'en théorie quantique des champs la causalité relativité est respectée, on va calculer le propagateur de l'équation de Klein-Gordon. Comme nous allons le voir, cela ne va pas suffire. Pour commencer, je vais calculer encore une fois le propagateur de l'équation de Schrödinger mais avec la méthode des fonctions de Green. La fonction de Green G de l'équation de Schrödinger vérifie par définition :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G(x-x') = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)G(x-x') = \delta^4(x-x') \quad (142)$$

On définit $p^\mu = (\omega, \vec{p})$ et la transformée de Fourier $\tilde{G}(p)$ par

$$G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-i p \cdot (x-x')} \quad (143)$$

En appliquant l'équation du mouvement sur cette égalité on obtient

$$\delta^4(x-x') = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\omega - \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m}\right) \tilde{G}(p) e^{-ip(x-x')} \quad (144)$$

On peut alors résoudre pour \tilde{G}

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{\omega - \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m}} \quad (145)$$

Donc

$$G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-x')}}{\omega - (\hbar^2 \vec{p}^2)/(2m)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - (\hbar^2 \vec{p}^2)/(2m)} \quad (146)$$

Cette expression présente des ambiguïtés dans le points tel que $\omega = \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m}$. En effet le problème n'est pas mathématique mais physique : cette ambiguïté existe car on n'a pas encore spécifié les conditions aux limites. On va prolonger l'intégrale dans le plan complexe en utilisant le théorème de Cauchy. On a alors deux choix pour contourner la singularité : choisir un contour qui passe au dessus ou en dessous de la singularité. On va choisir un contour qui passe au dessus. Pour cela on ajoute un petit terme complexe pur $i\epsilon$ et à la fin des calculs on prendra la limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\omega - \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m} \longrightarrow \omega - \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m} + i\epsilon \quad (147)$$

avec $\epsilon > 0$. On a alors besoin de l'intégrale suivante, que j'ai calculée avec Mathematica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')} d\omega}{\omega + i\epsilon} = -i\pi e^{-\epsilon(t-t')} [1 + \text{signe}(t-t')] \quad (148)$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')} d\omega}{\omega + i\epsilon} = -i\pi [1 + \text{signe}(t-t')] = -2i\pi\theta(t-t') \quad (149)$$

où θ est la fonction de Heaviside. Un changement de variable affine permet alors de calculer le propagateur

$$G(x-x') = -i\theta(t-t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp\left[i\left(\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m}(t-t')\right)\right] \quad (150)$$

Il est facile d'effectuer ces trois intégrales gaussiennes pour obtenir finalement

$$G(x - x') = -i\theta(t - t') \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t')} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{im(\vec{x} - \vec{x}')^2}{2\hbar(t - t')} \right] \quad (151)$$

Ceci est exactement l'expression trouvée dans l'annexe 1. Cette expression brise bien sûr la causalité relativiste puisqu'elle ne s'annule jamais, mais elle respecte la causalité galiléenne à cause du $\theta(t - t')$, on l'appelle la solution retardée. Si on avait choisi d'intégrer au dessous de la singularité, on aurait eu une expression similaire mais qui brise la causalité galiléenne, c'est la solution avancée.

Tournons nous maintenant au cas qui nous intéresse, c'est à dire le calcul du propagateur de Klein-Gordon. L'équation obéit par le propagateur libre s'écrit

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x - x') = -\delta^4(x - x') \quad (152)$$

La transformée de Fourier du propagateur vaut donc

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (153)$$

Pour calculer le propagateur, on a donc deux singularités tel que $k^2 - m^2 = 0$. Il existe trois choix de contour d'intégration possibles :

- au dessus des deux singularités
- au dessous des deux singularités
- mixte (dites de Feynman)

Comme nous allons le voir, le bon choix c'est celui de Feynman, car il résout le problème des énergies négatives. Pour implémenter la prescription de Feynman il suffit de faire

$$k^2 - m^2 \longrightarrow k^2 - m^2 + i\epsilon \quad (154)$$

Pour voir que ceci implique les conditions mixtes, notons $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ et décomposons \tilde{G} de la façon suivante

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k^0} \left(\frac{1}{k^0 - \omega_k + i\epsilon} + \frac{1}{k^0 + \omega_k + i\epsilon} \right) \quad (155)$$

On a donc bel est bien le contour mixte. Le calcul du propagateur se fait alors exactement comme celui de Schrödinger. On obtient finalement

$$G_F(x - x') = -i\theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-x')} - i\theta(t' - t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x-x')} \quad (156)$$

Ainsi en prenant le propagateur de Feynman on a le fait peu habituel suivant : les solutions d'énergies positives se propagent dans le sens du temps croissant, et les solutions d'énergies négatives remontent le temps à l'envers. En suivant Feynman, une particule d'énergie négative, parce qu'elle remonte le temps, peut être réinterprétée comme une nouvelle forme de matière, se propageant dans le sens croissant du temps et d'énergie négative : l'antimatière. Ainsi, le problème des énergies négatives se trouve résolu de façon très élégante. Cependant ce propagateur ne s'annule jamais comme dans le cas de l'équation de Schrödinger et de Klein-Gordon avec énergies positives. Est-ce que cela veut dire qu'encore une fois on a échoué à implémenter la causalité relativiste dans la mécanique quantique ? La réponse à cette question fondamentale est non : La théorie quantique des champs n'est pas une théorie conventionnelle qui décrit une seule particule. Il s'ensuit que la question « Est-ce que le propagateur s'annule en dehors du cône de causalité relativiste ? » n'est pas la bonne question à poser pour tester la causalité de la théorie. La bonne question, de nature plus « globale », qui tient compte du bilan de tous les processus possibles et non d'un seul en particulier est la suivante : « Est-ce que le commutateur s'annule en dehors du cône de causalité relativiste ? »

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 < 0 \quad (157)$$

Ceci assure en effet que deux mesures en des points séparés par un intervalle de type espace ne peuvent pas s'influencer mutuellement. Le calcul est fait dans [Kaku] :

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) & (158) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k^0) e^{-ik(x-y)} \\
&= \frac{i}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{si } t > r \\ 0 & \text{si } -r < t < r \\ -J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{si } t < -r \end{cases}
\end{aligned}$$

où ϵ est la fonction signe, $t = x_0 - y_0$, $r = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ et J_0 la fonction de Bessel. Donc

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{si } (x - y)^2 < 0 \quad (159)$$

8.4 Annexe 4 : Sans nombre infini de degrés de liberté, pas de brisure spontanée de symétrie

Je vais considérer le cas d'un système décrit par la physique statistique, le cas de la théorie quantique des champs est exactement identique. Une brisure de symétrie est une singularité dans l'énergie libre $F = kT \ln Z$ où la fonction de partition Z s'écrit avec des notations évidentes

$$Z = \sum_{\text{configurations}} e^{-\beta E_n} \quad (160)$$

Chacune des fonctions $e^{-\beta E_n}$ est bien sûr analytique pour $T \neq 0$. Toute somme finie de telles fonctions est également analytique. La fonction de partition d'un système possédant un nombre fini de degrés de liberté est donc analytique pour $T \neq 0$, et ceci reste vrai en prenant le logarithme pour calculer F . Si on veut décrire les transitions de phases, le seul moyen de s'en sortir est de prendre la limite thermodynamique, c'est à dire considérer un système infini, la somme infinie de fonctions analytiques ne l'étant pas en général.

Par exemple dans le modèle d'Ising, si on considère un système de spin fini à champ magnétique nulle, la symétrie du problème implique alors nécessairement que l'aimantation est nulle. Le seul moyen de briser cette symétrie est de prendre la limite thermodynamique et seulement après considérer la limite de champ magnétique nulle.

8.5 Annexe 5 : Un peu de relativité générale.

Après beaucoup de travail et de subtilités, Einstein a réussi à créer une théorie très élégante de la gravitation.

La distance entre deux points de coordonnées x^μ et $x^\mu + dx^\mu$ est définie à l'aide de la métrique $g_{\mu\nu}$ par (les conventions de sommation d'Einstein seront utilisées en général)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (161)$$

Par exemple sur la sphère S^2 et de rayon r

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (162)$$

L'intuition nous dit que l'espace euclidien est plat alors que la sphère est courbe. Pour quantifier cette courbure on définit les symboles de Christoffel

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right) \quad (163)$$

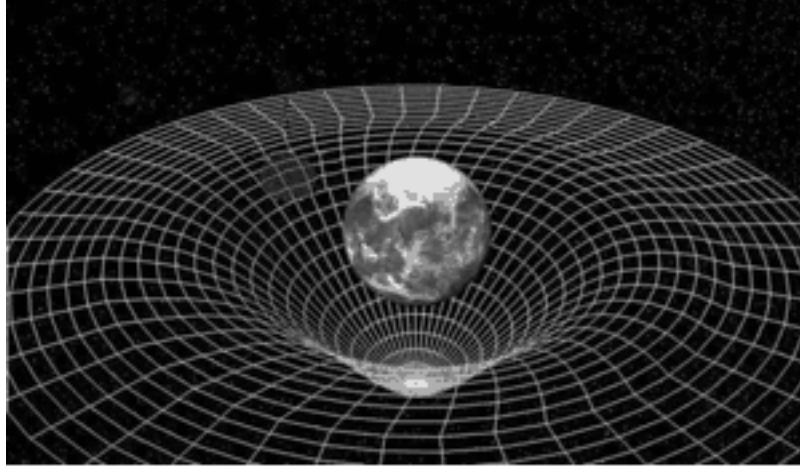


FIG. 4 – L'espace relativiste

Cependant cette quantité dépend du système de coordonnées et n'est donc pas intrinsèque. Pour le voir il suffit de calculer $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}$ pour le plan \mathbb{R}^2 dans deux systèmes de coordonnées différents :

$$\begin{aligned} ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 &\longrightarrow \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} \neq 0 \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 &\longrightarrow \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

La géométrie différentielle montre alors que ce qui est intrinsèque c'est le tenseur de Riemann

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\mu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\nu\eta} \quad (165)$$

$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$ s'annule si et seulement si l'espace est plat. On définit le tenseur de Ricci à partir de $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$

$$\text{Ric}_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (166)$$

et la courbure scalaire

$$R = g^{\mu\nu}\text{Ric}_{\mu\nu} \quad (167)$$

La relativité générale est construite sur les deux propositions suivantes

1. **Principe de relativité générale (Invariance par difféomorphisme) :** Les lois de la physique prennent la même forme dans tout système de coordonnées.
2. **Principe d'équivalence :** Il existe un système de coordonnées dans lequel le champ gravitationnel s'annule localement.

Dans la théorie de Newton, le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (168)$$

ou ρ est la densité de matière. Dans la relativité générale, le potentiel gravitationnel est remplacé par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Il faut donc écrire une équation qui régit l'évolution de $g_{\mu\nu}$ et qui remplace (168). Le choix le plus naturel est

$$G_{\mu\nu}[g] = \chi T_{\mu\nu} \quad (169)$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur qui traduit le contenu en énergie-impulsion et dont l'expression dépendra de chaque système étudié. $G_{\mu\nu}[g]$ est une certaine fonctionnelle de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées. A cause de la conservation de la matière-énergie, on peut alors montrer qu'il existe un unique tenseur $G_{\mu\nu}[g]$ qui dépende de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières et secondes, c'est le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu}[g] = \text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (170)$$

La limite de faible champ gravitationnel impose $\chi = 8\pi G$ pour être cohérente avec la gravitation newtonienne. On demande à l'équation du mouvement d'être au plus du deuxième ordre car les théories contenant des dérivées d'ordre supérieur présentent en général des problèmes de causalité ou de positivité de l'énergie.

Un point de vue variationnel est possible si on définit l'action suivante (en l'absence de matière), appelée l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S(g_{\mu\nu}) = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (171)$$

ou $g = \det g_{\mu\nu}$. La présence du terme $\sqrt{-g}$ se comprend facilement, $d^4x \sqrt{-g}$ étant en effet la mesure invariante : Soit J le jacobien de la transformation $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\nu\}$, c'est à dire le déterminant de la matrice $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$. L'élément de volume d^4x se transforme selon $d^4x = |J| d^4x'$. D'autre part, $g_{\mu\nu}$ étant un tenseur d'ordre 2, sa loi de transformation s'écrit

$$g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}(x) \quad (172)$$

On en déduit

$$g'(x') = \det g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}(x) = J^2 \det g_{\mu\nu}(x) = J^2 g(x) \quad (173)$$

Finalement, le signe de $\det g$ étant négatif (signature lorentzienne) on a

$$\sqrt{-g'(x')} d^4x' = \sqrt{-g(x)} d^4x \quad (174)$$

Pour beaucoup plus de détail sur les mathématiques de la relativité générale, voir [Nakahara].

8.6 Annexe 6 : Les relations de commutations canoniques et le théorème de Stone-von Neumann

Dans cette section je vais présenter des résultats sur lesquels je suis tombé un peu par hasard dans la littérature lors de mon stage et que je crois très important. Je m'appuie sur [Isham 1995]. Tout d'abord on va démontrer que la relation de commutation canonique de la mécanique quantique $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ ($\hbar = 1$) est une conséquence de l'homogénéité de l'espace physique. Une fois que nous aurons justifié cette relation de commutation, on citera un théorème mathématique puissant qui permet de préciser les espaces de Hilbert où une telle relation de commutation est possible et les différentes représentations des opérateurs X et P dedans : le théorème de Stone-von Neumann.

Commençant par démontrer la relation de commutation $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. Pour cela on aura besoin des deux théorèmes suivants :

Théorème de Stone. Soit $\{\hat{U}(r), r \in \mathbb{R}\}$ une famille d'opérateurs unitaires sur un hilbertien \mathcal{H} . Supposons que cette famille à un paramètre vérifie les trois conditions suivantes :

1. L'élément de matrice $\langle \phi | \hat{U}(r) | \psi \rangle$ est continue comme fonction de r pour tout $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$.
2. $\hat{U}(0) = \mathbb{I}$
3. Pour tout $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\hat{U}(r_1)\hat{U}(r_2) = \hat{U}(r_1 + r_2)$

Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint \hat{A} tel que

$$\hat{U}(r) = e^{ir\hat{A}} \quad \text{et} \quad i\hat{A}|\psi\rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\hat{U}(r) - \mathbb{I}}{r} |\psi\rangle$$

Le théorème de Stone généralise donc les propriétés de l'exponentielle à des espaces de Hilbert.

Théorème de Wigner. Soit $\vec{\psi} \mapsto \vec{\psi}'$ une application inversible d'un espace de Hilbert \mathcal{H} dans lui-même tel que $|\langle \vec{\psi}, \vec{\phi} \rangle| = |\langle \vec{\psi}', \vec{\phi}' \rangle|$ pour tout $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$. Alors il existe un opérateur $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (définie à une phase près) unitaire ou anti-unitaire et tel que $\vec{\psi}' = \hat{U}\vec{\psi}$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$.

Le théorème de Wigner montre donc que seuls des opérateurs unitaires ou anti-unitaires peuvent implémenter une symétrie en mécanique quantique.

On est prêts maintenant à démontrer la relation de commutation. On va le faire en plusieurs étapes.

1. Considérons un système quantique observée par deux observateurs O_1 et O_2 séparés par une distance a selon l'axe x . A priori, les états du systèmes vu par O_1 et O_2 sont décrits par des vecteurs différents, car le système paraît différent pour les deux observateurs. Déplacer l'observateur O_1 de a pour atteindre O_2 et déplacer le système lui-même de $-a$ vers O_1 doit être équivalent. Ainsi, à cause de l'homogénéité de l'espace physique, la mesure quantique effectuée sur le système doit être la même pour les deux observateurs. En particulier si les vecteurs relatifs à O_1 et O_2 sont $|\psi\rangle$ et $|\psi\rangle_a$ on doit avoir

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = |{}_a\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

2. D'après le théorème de Wigner, il existe un opérateur $\widehat{D}(a)$ unitaire ou anti-unitaire tel que

$$|\psi\rangle_a = \widehat{D}(a)|\phi\rangle$$

3. En introduisant un troisième observateur O_3 à une distance b de O_2 on a

$$|\psi\rangle_{a+b} = \widehat{D}(a+b)|\phi\rangle = \widehat{D}(b)|\phi\rangle_a = \widehat{D}(b)\widehat{D}(a)|\phi\rangle \quad (175)$$

Donc

$$\widehat{D}(b)\widehat{D}(a) = \widehat{D}(a+b)\forall a, b \in \mathbb{R}$$

4. Dans le cas particulier $a = b = r/2$ on a $\widehat{D}(r) = \widehat{D}(r/2)\widehat{D}(r/2)$. Un opérateur anti-unitaire au carré étant unitaire, $\widehat{D}(r)$ est donc unitaire.
5. Clairement $\widehat{D}(0) = \mathbb{I}$
6. On admet que l'espace est continu et on s'attend donc à ce que $\langle\phi|\psi\rangle_a = \langle\phi|\widehat{D}(a)|\psi\rangle$ évolue continuellement au fur et à mesure que l'observateur au point a est déplacé le long de l'axe x de manière continue.
7. D'après le théorème de Stone, il existe donc un unique opérateur auto-adjoint \widehat{d}_x tel que

$$\widehat{D}(a) = e^{ia\widehat{d}_x} \quad \text{et} \quad i\widehat{d}_x|\psi\rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\widehat{D}(a) - \mathbb{I}}{a} |\psi\rangle \quad (176)$$

8. Lors de la transformation $|\psi\rangle \mapsto \widehat{D}(a)|\psi\rangle$ les opérateurs se transforment selon $\widehat{B} \mapsto \widehat{B}_a = \widehat{D}(a)\widehat{B}\widehat{D}^{-1}(a)$. Si a est petit, on peut effectuer un développement limité (encore grâce au théorème de Stone) : $\widehat{D}(a) = 1 + ia\widehat{d}_x + O(a^2)$. L'équation précédente devient alors

$$\begin{aligned} \widehat{B}_a &= \left(1 + ia\widehat{d}_x\right)\widehat{B}\left(1 - ia\widehat{d}_x\right) \\ &\quad \widehat{B} + ia\left[\widehat{d}_x, \widehat{B}\right] + O(a^2) \end{aligned} \quad (177)$$

9. Si on prend $\widehat{B} = \widehat{X}$ et en remarquant que $\widehat{X}_a = \widehat{X} + a$ on a

$$\widehat{X} + a = \widehat{X}_a = \widehat{X} + ia\left[\widehat{d}_x, \widehat{X}\right] + O(a^2) \quad (178)$$

Donc dans la limite $a \rightarrow 0$

$$\left[\widehat{d}_x, \widehat{X}\right] = -i \quad (179)$$

Comme on va le voir dans la suite, $\widehat{d}_x = P$. On a ainsi justifié les relations de commutations canoniques.

Remarquons tout d'abord qu'une telle relation ne peut pas exister si \mathcal{H} est de dimension finie. En effet si $\dim \mathcal{H} = n$ on aura

$$0 = \text{Tr} \left[\widehat{X}, \widehat{P} \right] = \text{Tr} (i \mathbb{I}_n) = in \quad (180)$$

L'espace de Hilbert de tout système quantique qui tient compte de la position est donc de dimension infinie. Mais est-ce que la relation $[\widehat{X}, \widehat{P}] = i$ pose d'autres contraintes sur \mathcal{H} ? Le théorème de Stone von-Neumann apporte la réponse : sous quelques contraintes mathématiques très générales, \mathcal{H} est uniquement déterminé et il est égal à l'espace des fonctions de carré-intégrable (avec le produit scalaire habituel) $L^2(\mathbb{R})$! Pour être plus précis \mathcal{H} peut être différent de $L^2(\mathbb{R})$ mais il sera équivalent, c'est à dire que toutes les prédictions physiques seront celles de $L^2(\mathbb{R})$. Le théorème détermine également que toute représentation des opérateurs \widehat{X} et \widehat{P} sera équivalente à

$$\begin{aligned} \widehat{X} : \left(\widehat{X}\psi \right) (x) &= x\psi(x) \\ \widehat{P} : \left(\widehat{P}\psi \right) (x) &= -i \frac{d\psi}{dx}(x) \end{aligned} \quad (181)$$

Les fondements de la mécanique quantique sont beaucoup plus clairs maintenant !

8.7 Annexe 7 : Résolution algébrique exacte de l'oscillateur harmonique dépendant du temps

J'ai trouvé cette méthode dans [Lewis]. On considère un hamiltonien $H(t)$ qui dépend explicitement du temps et on suppose l'existence d'un opérateur I hermitien invariant (différent de $\text{cst} * \mathbb{I}$), c'est à dire

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad \text{et} \quad I^\dagger = I \quad (182)$$

L'équation du mouvement d'un état $|\rangle$ s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\rangle = H(t) |\rangle \quad (183)$$

En appliquant la conservation de I on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I(|\rangle)) = H(I(|\rangle)) \quad (184)$$

C'est à dire que I appliqué à une solution redonne une autre solution. Dans ce qui suit on suppose que $I(t)$ ne contient d'opérateur de dérivation par rapport au temps. On suppose également que I appartient à un ensemble complet d'opérateurs qui commutent et on indexe son spectre par λ . Finalement on note les vecteurs propres par $|\lambda, \kappa\rangle$ où κ est l'ensemble des autres nombres quantiques de l'ECOC

$$\begin{aligned} I(t) |\lambda, \kappa\rangle &= \lambda |\lambda, \kappa\rangle \\ \langle \lambda', \kappa' | \lambda, \kappa \rangle &= \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\kappa'\kappa} \end{aligned} \quad (185)$$

La suite d'équations suivante permet de démontrer alors que la valeur propre λ , qui est réelle car l'invariant est hermitien, est indépendante du temps. En dérivant l'équation (185) on a

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle \quad (186)$$

En opérant par l'équation (182) sur $|\lambda, \kappa\rangle$ on obtient

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + IH |\lambda, \kappa\rangle - \lambda H |\lambda, \kappa\rangle = 0 \quad (187)$$

Le produit scalaire de cette équation avec $|\lambda', \kappa'\rangle$ donne alors

$$i\hbar\langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle + (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', \kappa'|H|\lambda, \kappa\rangle = 0 \quad (188)$$

ce qui implique

$$\langle\lambda, \kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = 0 \quad (189)$$

Finalement si on prend le produit scalaire de (186) par $|\lambda, \kappa\rangle$ on a

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \langle\lambda, \kappa|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = 0 \quad (190)$$

Les valeurs propres de I étant indépendantes du temps, les vecteurs propres le sont aussi. Pour trouver le lien entre les vecteurs propres de I et les solutions de l'équation de Schrödinger, on commence par écrire l'équation du mouvement de $|\lambda, \kappa\rangle$, en utilisant la conservation de λ

$$(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle \quad (191)$$

En prenant le produit scalaire avec $\langle\lambda', \kappa'|$ et en utilisant (188) on a

$$i\hbar(\lambda - \lambda')\langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = (\lambda - \lambda')\langle\lambda', \kappa'|H|\lambda, \kappa\rangle \quad (192)$$

Pour $\lambda \neq \lambda'$ et seulement dans ce cas on a donc

$$i\hbar\langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = \langle\lambda', \kappa'|H|\lambda, \kappa\rangle \quad (193)$$

Si cette équation était valable aussi pour $\lambda = \lambda'$ on en déduirait que $|\lambda, \kappa\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger, mais ce n'est pas le cas. Mais il reste une issue : dans tout ce qu'on a fait jusqu'ici, on n'a pas fixé la phase de $|\lambda, \kappa\rangle$. On définit alors

$$|\lambda, \kappa\rangle_\alpha = e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)}|\lambda, \kappa\rangle \quad (194)$$

ou $\alpha_{\lambda\kappa}$ est une fonction arbitraire. Si on suppose que $I(t)$ ne contient pas de dérivation temporelle, ces nouveaux états forment également une base orthonormée qui diagonalise I . Ces nouveaux états peuvent satisfaire l'équation de Schrödinger, même pour $\lambda = \lambda'$, si $\alpha_{\lambda\kappa}$ vérifie l'équation

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = \langle\lambda, \kappa|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda, \kappa\rangle \quad (195)$$

Pour appliquer ceci à l'oscillateur harmonique dépendant du temps, il faut donc trouver un invariant et calculer les phases convenables. Pour cela je vais présenter directement les résultats de [Kim 2003].

Considérons dans un premier temps l'hamiltonien indépendant du temps suivant

$$H = \frac{\alpha_0}{2}X^2 + \frac{\beta_0}{2}P^2 \quad (196)$$

On note aussi

$$\omega_0^2 = \alpha_0\beta_0 \geq 0 \quad (197)$$

La résolution de ce problème peut être fait de façon complètement algébrique en diagonalisant le hamiltonien. On définit pour cela les opérateurs création / annihilation

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\beta_0}{2\hbar\omega_0}} \left[\frac{\omega_0}{\beta_0}X + iP \right] \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{\beta_0}{2\hbar\omega_0}} \left[\frac{\omega_0}{\beta_0}X - iP \right] \end{aligned} \quad (198)$$

Ces opérateurs vérifient bien sûr les relations de commutation $[a, a^\dagger] = 1$ et l'hamiltonien prend la forme très simple

$$H = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (199)$$

L'espace des solutions stationnaires a donc une structure d'espace de Fock où le vide $|0\rangle$ est définie par

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad (a^\dagger)^n |0\rangle = |n\rangle \quad (200)$$

Si maintenant H dépend du temps

$$H(t) = \frac{\alpha(t)}{2} X^2 + \frac{\beta(t)}{2} P^2 \quad (201)$$

On définit alors les opérateurs invariants

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \left[-\frac{\dot{u}^*}{\beta(t)} X + u^* P \right] \\ a^\dagger(t) &= -\frac{i}{\sqrt{\hbar}} \left[-\frac{\dot{u}}{\beta(t)} X + u P \right] \end{aligned} \quad (202)$$

où u est une solution complexe de l'équation classique du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}}{\beta(t)} \right) + \alpha(t)\beta(t) \left(\frac{u}{\beta(t)} \right) = 0 \quad (203)$$

Si on impose la condition suivante sur le Wronskien

$$\text{Wr}(u^*, u) = \frac{1}{\beta} (u\dot{u}^* - u^*\dot{u}) = i \quad (204)$$

alors les opérateurs $a(t)$ et $a^\dagger(t)$ vérifient les relations de commutations standard à temps égaux

$$[a(t), a^\dagger(t)] = i \quad (205)$$

L'espace des solutions stationnaires a donc une structure d'espace de Fock dépendant du temps où le vide $|0\rangle$ est défini par

$$a(t)|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad (a^\dagger(t))^n |0, t\rangle = |n, t\rangle \quad (206)$$

On a donc réussi à résoudre exactement et algébriquement une théorie dépendant explicitement du temps.

8.8 Annexe 8 : Une théorie d'ordre supérieur, la GGFT à temps unique

Je présente ici l'analyse hamiltonienne et la quantification des théories d'ordres supérieurs et je l'applique à la GGFT à temps unique. Je vais l'écrire pour le cas d'un lagrangien d'une seule particule, l'extension à la théorie des champs étant immédiate. Soit le lagrangien

$$L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}) \quad (207)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont obtenues immédiatement en considérant les variations de la position et de toutes ses dérivées

$$\sum_{n=0}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} = 0 \quad (208)$$

On définit alors N variables de positions

$$Q_n = q^{(n-1)} \quad 1 \leq n \leq N \quad (209)$$

Et le moment conjugué à chaque champ

$$P_n = \sum_{k=n}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^{k-n} \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \quad (210)$$

L'hamiltonien est définie par

$$H = \sum_{n=1}^N P_n Q_{n+1} - L(Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+1}) \quad (211)$$

Les équations d'Hamilton s'écrivent

$$\dot{Q}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n} \quad \dot{P}_n = -\frac{\partial H}{\partial Q_n} \quad (212)$$

où on a défini les crochets de Poisson entre deux fonctions de l'espace des phases de la manière suivante

$$\{A, B\} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial A}{\partial Q_{n+1}} \frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q_{n+1}} \frac{\partial A}{\partial P_n} \quad (213)$$

Un calcul très simple permet de montrer que ces équations sont équivalentes à l'équation d'Euler-Lagrange.

Les relations canoniques entre les couples conjugués sont les relations naturelles. La quantification de cette théorie ne posera pas les problèmes que j'ai rencontrés lors de la quantification de la GGFT multi-temps. En effet ici le nombre de champs et de moments conjugués coïncide. Imposer des relations d'anticommutations entre chaque couple de variables conjugués n'aboutira donc pas à des incohérences. Appliquons cela au cas de la GGFT. Le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \square_1 \square_2 \phi + i \square_1 \phi^\dagger \partial_\tau \phi + i \square_2 \phi^\dagger \partial_\tau \phi + \phi \square_1 \square_2 \phi^\dagger - i \square_1 \phi \partial_\tau \phi^\dagger - i \square_2 \phi \partial_\tau \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_\tau^2 \phi - \phi \partial_\tau^2 \phi^\dagger \quad (214)$$

Les nouveaux champs ψ_i et moments π_i sont

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi & \psi_2 &= \dot{\phi} & \psi_3 &= \ddot{\phi} \\ \pi_0 &= [\square_1 \square_2 - i \square_1 \partial_\tau - i \square_2 \partial_\tau - \partial_\tau^2] \phi^\dagger \\ \pi_1 &= [i \square_1 \partial_\tau + i \square_2 \partial_\tau + \partial_\tau^2] \phi^\dagger \\ \pi_2 &= -\phi^\dagger \end{aligned} \quad (215)$$

On définit des quantités analogues pour le champ ϕ^\dagger . Afin de quantifier, on impose aussi les relations d'anticommutations à temps égaux suivantes :

$$\begin{aligned} \{ \phi(x, \tau), \pi_0(y, \tau) \} &= i \delta^4(x - y) \\ \{ \dot{\phi}(x, \tau), \pi_1(y, \tau) \} &= i \delta^4(x - y) \\ \{ \ddot{\phi}(x, \tau), \pi_2(y, \tau) \} &= i \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (216)$$